This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 462286

GALILEO FERRARIS

WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, dafs bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlufsband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** und die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.**

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 20000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststrafse 3. **B. G. Teubner.**

ENGINEERING
LIBRARY
QC
523
.F375

Alexander Finzi 9.3

GALILEO FERRARIS

WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

NACH DEN

VORLESUNGEN ÜBER ELEKTROTECHNIK

GEHALTEN IN DEM R. MUSEO INDUSTRIALE IN TURIN

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN

VON

DR. LEO FINZI

MIT 161 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1901

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Engin
6-23-1932

Vorwort.

Im Februar des Jahres 1897 kam nach Deutschland die Trauerkunde, dass Professor Galileo Ferraris seiner segensreichen Thätigkeit durch den Tod entrissen war. Die Nachricht machte den tiefsten Eindruck in der ganzen elektrotechnischen Welt und ganz besonders auch bei uns in Deutschland.

Ferraris war erst 50 Jahre alt, als seiner bedeutenden Wirksamkeit ein Ziel gesetzt wurde. Er hat als Physiker an der technischen Hochschule und an der Universität in Turin studiert und später mit einigen Jahren Unterbrechung, während deren er an die Turiner Universität berufen war, seine Hauptlehrthätigkeit an dem „Reale Museo Industriale Italiano" zu Turin entfaltet, indem er die bis dahin hauptsächlich auf die wissenschaftliche Physik angewandten Gesetze der Elektrizitätslehre in ihrer Anwendung auf die technische Physik weiter bildete und nutzbar machte. Sein Verdienst war es auch, dass im Jahre 1886 die Elektrotechnische Ingenieurschule zu Turin, die erste Lehranstalt dieser Art in Italien, erstand. In den letzten Jahren vor seinem Tode war er der Direktor des „Reale Museo".

Das für die Elektrotechnik wichtigste von ihm bearbeitete Forschungsgebiet war das der Wechselströme und der aus dem Zusammenwirken von Wechselströmen mit verschiedener Phase entstehenden magnetischen Felder. Im Jahre 1888 erschien seine epochemachende Abhandlung „Rotazioni elettrodinamiche", in welcher das Gesetz der magnetischen Wirkungen von Wechselströmen verschiedener Phase zum ersten Male in abgeschlossener Form gegeben wurde. Er selbst und insbesondere die neuere elektrotechnische Industrie wurden durch diese Betrachtungen auf die Konstruktion von Wechselstrommotoren geführt, deren rotierende Anker keine Stromzuführungen mehr besassen, welche asynchron liefen und bei denen die fundamentalen Nachteile der einphasigen Wechselstrommotoren vermieden waren. Das von Ferraris begründete magnetische Drehfeld ist die Grundlage geworden für die ganze moderne Entwickelung der Drehstrom-Systeme.

Auf der Frankfurter Ausstellung bei Gelegenheit des internationalen Elektrotechniker-Kongresses im Jahre 1891, als dem Präsidenten des Kongresses, Dr. Werner Siemens, aus den verschiedenen benachbarten Ländern Vizepräsidenten beigegeben werden sollten, unterlag es keinem Zweifel, dass unter den Italienern die Wahl auf Ferraris fallen musste. Die deutschen Elektrotechniker haben in Frankfurt Gelegenheit gehabt, neben dem berühmten Forscher in Ferraris den ausserordentlich liebenswürdigen und ebenso bescheidenen Menschen kennen zu lernen. Er hat dort so viele Verehrer und Freunde, wie Bekannte erworben. Es ist uns Deutschen eine ganz besondere Freude, dass wir in diesem in deutscher Sprache erscheinenden Werke ein lebendiges Andenken an Ferraris überliefert erhalten.

Der Inhalt des Werkes ist durch den Titel so treffend bezeichnet, dass eine Erläuterung überflüssig erscheint. Was ich hervorheben möchte, ist besonders die ausserordentlich klare, einfache und elegante Behandlung des Stoffes, welche dem Werke in allen Kreisen deutscher Elektrotechniker, mögen sie lernen, lehren oder praktisch ausüben, einen grossen Freundeskreis erwerben wird.

Hannover, den 23. Juli 1901.

Dr. W. Kohlrausch.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle den Herren Dr. Blochmann, Dir. Maffiotti und Ing. Raydt für ihre wertvolle Unterstützung, und der Verlagsbuchhandlung Teubner für die angenehme Art, mit der sie die Verhandlungen geführt und für die schöne Ausstattung des Bandes gesorgt hat, meinen Dank auszusprechen.

Aachen, Juli 1901.

Dr. Leo Finzi.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitung. Definitionen und allgemeine Sätze über Vektoren.

§ 1.

Feld eines Vektors.

Seite

1. Skalar- und Vektorgrössen 1
2. Addition und Subtraktion von Vektoren 2
3. Feld eines Vektors 3
4. Fluss eines Vektors durch eine Fläche 3
5. Fluss eines Vektors durch eine geschlossene Fläche 4
6. Divergenz 6
7. Solenoidische Verteilung 7
8. Niveauflächen 7
9. Linienintegral eines Vektors 8
10. Potential 9
11. Bestimmung des Vektors durch das Potential 10
12. Flusslinien und Flussröhren 12
13. Änderung des Vektors längs einer unendlich dünnen Flussröhre 13
14. Einheitsröhren 14
15. Darstellung des Feldes eines Vektors 14
16. Gleichförmiges Feld 16

§ 2.

Kraftfelder.

17. Massen oder Mengen von Agens 17
18. Potential. Arbeit 19

§ 3.

Newton'sche Kraftfelder.

19. Newton'sche Kräfte 21
20. Potential in den Newton'schen Kraftfeldern 23
21. Energie 24
22. Kraftflüsse. Sätze von Stokes und Green. Solenoidische Bedingung 26
23. Dichte des Agens. Gleichungen von Poisson und Laplace 30

Zweites Kapitel.

Elektrizität.

§ 1.

Elektrischer Gleichgewichtszustand.

Seite

24. Elektrisierung durch Reibung 32
25. Leiter und Nichtleiter oder Konduktoren und Isolatoren 33
26. Zwei Arten von Elektrizität 34
27. Elektrisierung durch Influenz 35
28. Elektrische Anziehung und Abstossung 36
29. Elektrisches Feld 37
30. Grundgesetze des elektrischen Gleichgewichtszustandes 37
31. Elektrisches Potential 39
32. Elektrische Flächendichte. Beziehung zwischen elektrischer Dichte und elektrischer Kraft 41
33. Elektrostatischer Druck 42
34. Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche der Konduktoren. Spitzenwirkung 45
35. Korrespondierende Flächen 46
36. Darstellung von besonderen elektrischen Feldern. Elektrostatische Influenz . 47
37. Elektrisierter Körper in einem hohlen Konduktor 51
38. Änderung der Verteilung der Massen ohne Veränderung der Verteilung der Kraft in gewissen Raumgebieten 52
39. Geradlinige und zylindrische Verteilung 52
40. Elektrostatische Kapazität 56
41. Kondensatoren 58
42. Spezifisches Induktionsvermögen oder Dielektrizitätskonstante 60
43. Polarisation. Verschiebung 63
44. Physikalische Bedeutung der konstanten Faktoren k und ε 69
45. Energie eines elektrischen Feldes 70
46. Parallel- und Hintereinanderschaltung von Kondensatoren. Kapazität einiger Kondensatoren 72

§ 2.

Elektrischer Strom.

47. Elektrisierung durch Kontakt 81
48. Hydroelelektrisches Element 83
49. Thermoelektrisches Element 84
50. Konduktoren, die sich in einem magnetischen Felde bewegen 84
51. Elektromotorische Kraft 85
52. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen 87
53. Elektrischer Strom 90
54. Ohm'sches Gesetz 94
55. Gesetze von Kirchhoff 98
56. Stromverzweigung 99

Seite
57. Arbeit eines Stromes. Joule'sches Gesetz 103
58. Beziehung zwischen Arbeit und elektromotorischer Kraft 104
59. Chemische Arbeit. Gesetze von Faraday und Becquerel 106
60. Hypothese von Grotthus. Allgemeiner Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen 111

Drittes Kapitel.

Magnetismus.

§ 1.

Magnetische Kräfte. Magnetische Massen. Magnetische Felder.

61. Magnetische Körper. Magnete. Magnetismus 114
62. Coulomb'sches Gesetz. Magnetische Massen. Magnetisches Feld 116
63. Gleichförmiges magnetisches Feld. Pole eines Magneten 119
64. Magnetisches Moment 121
65. Magnetnadel. Untersuchung eines magnetischen Feldes 122
66. Magnetische Spektra 124
67. Faraday'sche Regel über die Wirkung der Kraftlinien in einem Felde . . . 128

§ 2.

Magnetisierung. Verteilung des Magnetismus in den Magneten.

68. Bruch eines Magnetstabes 130
69. Richtung und Stärke der Magnetisierung. Gleichförmige und ungleichförmige Magnete 131
70. Magnetisierungslinien. Magnetische Fäden 133
71. Solenoidische oder einfache Fäden. Solenoidische Magnetisierung 134
72. Nicht solenoidische Fäden und Magnete. Freier Magnetismus im Innern eines Magneten. Dichte des Magnetismus 135
73. Magnetische Blätter. Lamellare Magnete 136
74. Verteilung des freien Magnetismus in den Magneten 137
75. Potential, das von einem Elementarmagneten herrührt. Allgemeiner Ausdruck für das von einem beliebigen Magneten herrührende Potential. 144
76. Das von einem einfachen magnetischen Blatte erzeugte Feld 146

§ 3.

Kräfte im Innern eines Magneten. Magnetische Induktion.

77. Magnetisches Feld im Innern der Magnete 150
78. Vektoren mit solenoidischer und stetiger Verteilung 153
79. Polare und elektromagnetische Definition der magnetischen Kraft. Kräfte im Innern von Höhlungen in Magneten 154
80. Magnetische Induktion. Polarisation. Verschiebung 161
81. Magnetischer Kreis. Magnetomotorische Kraft 166
82. Induktionslinien und Kraftlinien 167

Seite

83. Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität. Diamagnetische und paramagnetische Körper 168
84. Magnetische Eigenschaften der magnetischen Materialien 175
85. Einfluss der chemischen Zusammensetzung und der physikalischen Zustände 180
86. Magnetischer Kreisprozess. Hysteresis 181
87. Retentionsvermögen. Koerzitivkraft 184

§ 4.

Magnetische Feldenergie.

88. Arbeit, die von den magnetischen Kräften zur Veränderung der Verschiebung geleistet wird 187
89. Hysteretische Körper. Zyklische Magnetisierungsprozesse 190
90. Körper ohne Hysteresis. Feldenergie 191

Viertes Kapitel.

Elektromagnetismus.

§ 1.

Magnetische Felder, welche durch Änderungen der elektrischen Verschiebung erzeugt werden.

91. Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme. Geradlinige und kreisförmige Strombahn. Solenoid 194
92. Analogie zwischen den von elektrischen Strömen und den von Magneten hervorgerufenen Feldern 199
93. Prinzip der Äquivalenz 200
94. Äquivalenz zwischen einem magnetischen Blatte und einem Strome im endlichen, geschlossenen Kreise. Elektromagnetisches Masssystem . . . 203
95. Tragweite des Prinzips der Äquivalenz 205
96. Geradliniger Strom. Gesetz von Biot und Savart 207
97. Zylindrisches, geradliniges Solenoid 209
98. Verteilung des magnetischen Potentials 213
99. Verteilung des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes. 216
100. Allgemeine Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung und dem erzeugten magnetischen Felde 217
101. Einfluss der freien magnetischen Massen und der Beschaffenheit der Materialien des Feldes 218
102. Berechnung der magnetischen Kreise. Analogie mit dem Ohm'schen Gesetze und den Kirchhoff'schen Prinzipien 222
103. Strom in einem magnetischen Felde. Energie. Arbeit 225
104. Deformierbare Stromkreise. Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf endliche oder unendlich kleine Teile von Strombahnen 226
105. Ströme in dem von einer einzigen Masse erzeugten Felde. Kreisstrom. Elektromagnetische Einheit der Stromstärke 229

§ 2.

Elektromotorische Kräfte, welche von Änderungen der magnetischen Verschiebung hervorgebracht sind.

Seite
106. Elektromagnetische Induktion 230
107. Gesetze von Lenz und Neumann 233
108. Induzierte Elektrizitätsmenge 234
109. Allgemeine Beziehung zwischen der Änderung der magnetischen Verschiebung und der induzierten E. M. K. 234
110. Ströme, induziert durch Änderung der Stromstärke. Koeffizient der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion 236

Fünftes Kapitel.

Veränderliche Ströme.

§ 1.

Grundgesetze und allgemeine Betrachtungen.

111. Ohm'sches Gesetz 241
112. Extraströme beim Schliessen und Öffnen des Stromkreises 242
113. Arbeit eines veränderlichen Stromes. Innere Stromenergie 242
114. Mechanische Analogien. Natur des elektrischen Stromes 247

§ 2.

Wechselströme.

115. Alternierende Grössen. Graphische Darstellung. Definitionen 248
116. Sinoïdale alternierende Grössen. Polare Darstellung, Summierung und Differentiation 252
117. Sinoïdale Wechselströme in Stromkreisen mit Ohm'schem und induktivem Widerstand 256
118. Einfluss der Kapazität in Wechselstromkreisen 261
119. Wechselstromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität 263
120. Elektrische Resonatoren 267
121. Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Wechselstromkreises . . . 269
122. Stromverzweigung 271
123. Arbeit eines Wechselstromes 274
124. Induktanz und Kapazität der elektrischen Leitungen 277
125. Wirkung der Induktanz und der Kapazität in einem Wechselstromnetze. Ferranti'sches Phänomen 279
126. Berechnung der Kapazität eines Netzes 283
127. Berechnung der Induktanz in einem Verteilungsnetze 284
128. Der Skin-Effekt. Gleichungen von Lord Kelvin. Zunahme des Ohm'schen Widerstandes eines Leiters 289

§ 3.

Entladungsströme der Kondensatoren.

Seite
129. Lord Kelvins Gleichungen 295
130. Aperiodische und oscillierende Entladung 297
131. Eigenschaften der Entladungsströme. Blitzableiter. Tesla-Ströme 302

Sechstes Kapitel.

Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen.

§ 1.

Maxwells elektromagnetische Lichttheorie.

132. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen nichtleitenden Medium 305
133. Besonderer Fall. Fortpflanzung durch ebene Wellen 310
134. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem beliebigen Medium 314
135. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen leitenden Medium 314
136. Maxwell'sche Hypothese über die Beschaffenheit des Lichtes und deren hauptsächlichste experimentelle Bestätigungen 316

§ 2.

Hertz'sche Versuche.

137. Zweck der Versuche 318
138. Praktische Anordnung der Hertz'schen Versuche. Erreger. Resonator . . 319
139. Experimentelle Ergebnisse 323

§ 3.

Fortpflanzung der Energie in einem elektromagnetischen Felde.

140. Gleichung und Hypothese von Poynting 329
141. Besonderer Fall eines geradlinigen Stromes. Teilnahme des Dielektrikums und des Leiters an der Übertragung 335
142. Tragweite der Poynting'schen Theorie 338
143. Die Energiewanderung findet thatsächlich im Dielektrikum und nicht in dem Leiter statt 340
144. Allgemeine Betrachtungen über die obigen Theorien 343

Anhang.

Allgemeine Bemerkungen über die elektrischen und magnetischen Masseinheiten.

Seite

1. Grund- und abgeleitete Einheiten. Absolutes C. G. S.-System 346
2. Geometrische, kinematische und mechanische Grössen 348
3. Magnetische Grössen 349
4. Elektrische Grössen 350
5. Beziehung zwischen den Einheiten der beiden Systeme 352
6. Praktisches Masssystem 354
7. Absolute und relative Messungen. Normalien der praktischen Einheiten . . 355
8. Beschlüsse des internationalen elektrotechnischen Kongresses in Chicago bezüglich der elektrischen Masseinheiten 356

Bemerkung.

Im Texte ist auf die Formeln durch Zahlen in runden Klammern ( ), auf die Abschnitte durch Zahlen in eckigen Klammern [ ] hingewiesen.

Erstes Kapitel.

Einleitung. — Definitionen und allgemeine Sätze über die Vektoren.

§ 1.

Feld eines Vektors.

1. Skalar- und Vektorgrössen. — Die Grössen, welche sich beim Studium der physikalischen Erscheinungen unseren Betrachtungen darbieten, zerfallen in zwei Klassen.

Der ersten Klasse gehören die Grössen an, die durch eine einfache, numerische Angabe vollständig definiert werden können, welche das Verhältnis zwischen der betrachteten und einer anderen, als Einheit genommenen, gleichartigen Grösse ausdrückt; sie werden *Skalargrössen* genannt.*) Beispiele von Skalargrössen sind: die Länge einer Linie, das Volumen eines geometrischen festen Körpers, die Masse eines materiellen Körpers, der hydrostatische Druck im Innern einer Flüssigkeit, die Dichte eines Körpers, die Temperatur in einem Punkte des Raumes etc.

Der zweiten Klasse gehören die Grössen an, denen eine Richtung zukommt, und die deswegen nur durch drei Angaben, wie z. B. durch eine Länge und zwei Winkel oder durch die drei Komponenten nach drei Koordinatenachsen vollständig definiert werden können. Man nennt die Grössen dieser Art *Vektorgrössen* oder *Vektoren.***) Eine Vektorgrösse lässt sich immer darstellen durch die längs einer geraden Linie von bestimmter Richtung erfolgende Verschiebung eines Punktes um eine bestimmte Strecke. So giebt uns z. B. eine Strecke OA (Fig. 1) die geometrische Darstellung eines Vektors, der als Richtung die Richtung OA und als numerischen Wert (*Tensor* des Vektors) die in einem passenden Massstabe gemessene Länge OA besitzt. Die Wahl des Ursprunges O, des Ausgangspunktes des

Fig. 1.

*) Der Ausdruck: „*Skalargrösse*“ ist gebildet in Anlehnung an das englische Zeitwort: *to scale* = *wägen, messen.*

**) Der Ausdruck: „*Vektorgrössen*“ ist gebildet in Anlehnung an das lateinische Zeitwort: *vehere* = *fahren.*

Vektors, ist bei der Darstellung des letzteren ganz willkürlich. Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie dieselbe Grösse und dieselbe Richtung haben.

Beispiele von Vektorgrössen sind: die Kraft, welche auf einen materiellen Punkt wirkt, die Beschleunigung, die sie diesem erteilt, die Verschiebung, die er erfährt, und dergl.

2. Addition und Subtraktion von Vektoren. — Indem wir die Verschiebung eines Punktes als Darstellung eines Vektors betrachten, ergiebt sich sogleich, welche Bedeutung der Summe zweier Vektorgrössen beizulegen ist.

Wenn man nämlich einem Punkte eine Verschiebung OA (Fig. 2) und nachher noch eine Verschiebung AB in einer beliebigen andern Richtung erteilt, hat man dadurch erzielt, dass der Punkt von O nach B gekommen ist, was man auch direkt durch die Verschiebung des Punktes in der Richtung OB erreichen kann. Es liegt daher nahe, die Strecke OB die Summe der beiden Vektoren OA und AB zu nennen.

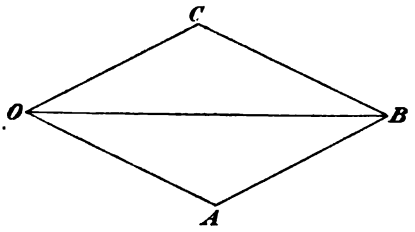

Fig. 2.

Der Vektor OB kann auch als Summe der beiden Vektoren OC und CB aufgefasst werden, welche bezw. gleich (in dem für Vektorgrössen giltigen Sinne) den Vektoren AB und OA sind. Die Summe zweier Vektoren ist also unabhängig von der Reihenfolge, in welcher man dieselben betrachtet.

Die Addition der Vektoren ist, wie man sieht, dieselbe Operation wie sie in der Mechanik zur Veranschaulichung der Zusammensetzung von Kräften angewendet wird. OB kann *Vektorsumme* oder *resultierender Vektor* der beiden Vektoren OA und AB, letztere können *Vektorkomponenten* genannt werden.

Man kann danach folgende Sätze aussprechen:

Vektorsumme oder resultierender Vektor zweier gegebener Vektoren ist der Vektor, der von der Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten gleich und parallel den gegebenen Vektoren sind, (oder auch von der Geraden, welche mit den beiden an einander gefügten Vektoren ein Dreieck bildet).

Vektorsumme oder resultierender Vektor mehrerer Vektoren ist der Vektor, der von der Strecke dargestellt wird, die das Polygon schliesst, dessen Seiten parallel und gleich den nach einer beliebigen Reihenfolge genommenen, zu summierenden Vektoren sind.

Die Vektorsumme ist Null, wenn sich das Polygon der komponierenden Vektoren von selbst als ein geschlossenes ergiebt.

Als besonderer Fall ist die Summe der beiden Vektoren OA und AB gleich Null, wenn die beiden Punkte B und O zusammenfallen; es ist dann

$$OA + AO = 0 \quad \text{oder} \quad OA = -AO.$$

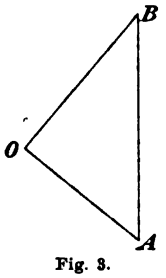

Fig. 3.

Zwei gleichgrosse, aber entgegengesetzt gerichtete Vektoren müssen als mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet angesehen werden; ihre Summe ist gleich Null.

Von dieser Betrachtung ausgehend, kann man auch von *Vektordifferenz* zweier Vektoren reden. So hat man nach den obigen Sätzen und Definitionen (Fig. 3):

$$AB = AO + OB = OB + AO = OB - OA.$$

Der Vektor AB kann also Differenz der Vektoren OB und OA genannt werden.

3. Feld eines Vektors. — Man nennt *Feld eines Vektors* den Raum, in welchem sich der Vektor befindet, oder in welchem wir ihn betrachten wollen.

Ein Feld kann den ganzen unendlichen Raum umschliessen oder von einer oder mehreren Flächen begrenzt oder eingeschlossen werden.

Wenn für jeden Punkt des Feldes der Wert und die Richtung als Funktionen der Koordinaten des Punktes bekannt sind, so sagt man, die *Verteilung des Vektors* ist innerhalb des Feldes bekannt.

Beim Studium der Verteilung eines Vektors in seinem Felde ist es nützlich, einige mit dem Vektor selbst zusammenhängende Skalargrössen und zwar den *Fluss des Vektors durch eine Fläche* und das *Integral des Vektors längs einer Linie* ins Auge zu fassen.

4. Fluss eines Vektors durch eine Fläche. — Im Felde eines Vektors betrachte man im Punkte O (Fig. 4) ein Flächenelement AB vom Inhalt dS.

Es sei NN' die Normale des Elementes, deren positive Richtung von O nach N zeige; ferner sei der im Punkte O angreifende Vektor durch die Strecke OF dargestellt und Θ sei der Winkel,

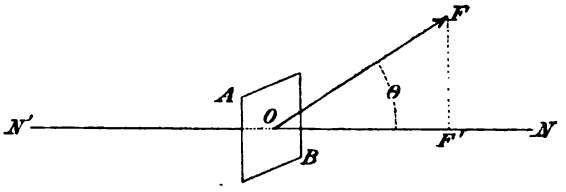

Fig. 4.

welchen er mit der positiven Richtung der Normalen bildet. Ist OF' die Projektion von OF auf die Normale $N'N$, so stellen die beiden Vektoren

OF' und $F'F$ die Komponenten des Vektors OF dar, genommen in einer zum Flächenelement normalen und einer zu demselben parallelen Richtung, während der Vektor OF als Vektorsumme dieser beiden betrachtet werden kann.

Man bezeichne mit f und $f_n = f\cos\Theta$ die numerischen Werte der beiden Vektoren OF und OF'. Man nennt dann das Produkt $f_n dS = fdS\cos\Theta$, gebildet aus der Komponenten des Vektors nach der positiven Richtung der Normalen und der Fläche des Elementes, den *Fluss des Vektors durch das Flächenelement* oder das *Integral des Vektors über das Element.*

Dieser Fluss kann positiv oder negativ sein, je nachdem Θ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Das Vorzeichen des Flusses hängt somit von der Wahl der positiven Richtung auf der Normalen ab.

Wir betrachten nun eine endliche, beliebig begrenzte Fläche SS und denken sie in ihre Flächenelemente zerlegt.

Man nennt *Fluss durch die Fläche* SS die Summe der Flüsse durch die einzelnen Flächenelemente. Wenn wir ihn mit φ bezeichnen, haben wir

$$\varphi = \int_S f_n\, dS = \int_S f\cos\Theta\, dS.$$

Der Index S bei dem Integralzeichen deutet an, dass die Integration über die ganze Fläche SS ausgedehnt werden muss. Wie bei dem Elementarfluss, so hängt auch für eine endliche Fläche das Vorzeichen von der Wahl der positiven Richtung der Normalen ab.

Nimmt man an, dass in jedem Punkte des Feldes zwei oder mehrere Vektoren derselben Art vorkommen, so kann man durch jedes Flächenelement und folglich durch irgend eine begrenzte Fläche den Fluss der einzelnen Vektoren und auch den des resultierenden Vektors betrachten. Da in jedem Punkte des Feldes die Komponente des resultierenden Vektors nach irgend welcher Richtung gleich der algebraischen Summe der Komponenten der einzelnen komponierenden Vektoren nach derselben Richtung ist, so ist für jedes Flächenelement und folglich auch für eine beliebig begrenzte Fläche der Fluss des aus mehreren Vektoren resultierenden Vektors durch das Element oder durch die Fläche gleich der algebraischen Summe der Flüsse der einzelnen komponierenden Vektoren.

Die Flüsse werden algebraisch und nicht nach Art der Vektoren summiert; sie sind Skalar- und nicht Vektorgrössen.

5. Fluss eines Vektors durch eine geschlossene Fläche. — In einer geschlossenen Fläche können wir als positive Richtung der Normalen die nach innen oder diejenige nach aussen wählen. Im ersten Falle kann der

Fluss in die Fläche oder in den von der Fläche eingeschlossenen Raum *eintretend*, im zweiten aus der Fläche oder aus dem von der Fläche eingeschlossenen Raume *austretend* genannt werden. Aus dem Umstande, dass, wenn man die Richtung der Normalen umkehrt, auch das Vorzeichen des Flusses geändert wird, folgt, dass der in eine geschlossene Fläche eintretende Fluss entgegengesetzt gleich dem aus der Fläche austretenden Flusse ist.

Denken wir uns das von der geschlossenen Fläche S begrenzte Volumen V in eine gewisse Zahl von Teilen v zerlegt, so können wir den aus dem ganzen Volumen V austretenden Fluss, wie auch die aus den einzelnen Teilen v dieses Volumens austretenden Flüsse betrachten. Man kann leicht erkennen, dass die Summe der aus den einzelnen Teilen v austretenden Flüsse, wenn die Verteilung des Vektors innerhalb der Fläche S keine Unstetigkeit bietet, gleich dem aus dem ganzen Volumen V austretenden Fluss ist. Um dies zu beweisen, genügt es, zwei beliebige Teile v, welche unmittelbar nebeneinander liegen, zu betrachten; z. B. die Teile p und q (Fig. 5), welche die gemeinsame Seite $abcd$ besitzen. Der Fluss, der durch die Fläche $abcd$ hindurchgeht, tritt von einem der beiden Volumina p und q aus und in das andere ein; er ist ein positiver Teil des aus dem ersten Volumen austretenden und ein positiver Teil des in das zweite Volumen eintretenden Flusses, also ein negativer Teil des aus dem zweiten Volumen austretenden Flusses. In Folge dessen haben wir in der Summierung der aus p und q austretenden Flüsse zwei gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Posten, welche sich gegenseitig aufheben. — In dieser Weise heben sich alle Flüsse gegenseitig auf, die aus solchen Flächen der Teilvolumina v austreten, welche mit Flächen benachbarter Teilvolumina zusammenfallen. Da nun die Summe aller Teilvolumina v das Volumen V bildet, so bleiben schliesslich nur die Flüsse erhalten, die durch solche Flächen der Teilvolumina v hindurchgehen, welche der Fläche S angehören; die Summe dieser Flüsse ergiebt den aus der Fläche S austretenden Fluss.

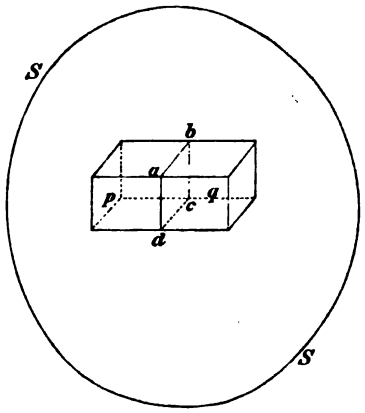

Fig. 5.

Dasselbe gilt in entsprechender Weise von den eintretenden Flüssen.

6. Divergenz. — Wenn wir im Felde eines Vektors ein Volumen v betrachten, und mit φ den aus der Begrenzungsfläche dieses Volumens austretenden Fluss des Vektors bezeichnen, so ergiebt der Quotient $\frac{\varphi}{v}$ den Mittelwert des aus der Volumeneinheit austretenden Flusses. Wenn v in einem bestimmten Punkte nach Null konvergiert, so strebt φ auch nach Null, aber ihr Verhältnis kann nach einem endlichen Limes $\frac{d\varphi}{dv}$ konvergieren, welcher eine Skalargrösse, und zwar eine Funktion derjenigen Veränderlichen ist, durch welche die Lage des Punktes bestimmt wird.

Von Maxwell, für welchen, da er sich an die Hamilton'sche Quaternionenlehre anlehnte, die Betrachtung des eintretenden Flusses näher lag, ist vorgeschlagen worden, der Grösse $\left(-\frac{d\varphi}{dv}\right)$ den Namen *Konvergenz des Vektors* zu geben; Heaviside nannte in Nachahmung dieser Bezeichnung die Grösse $\frac{d\varphi}{dv}$, die wir hier betrachten, *Divergenz des Vektors*. Diesen Ausdruck werden wir auch im Folgenden verwenden.

Analytischer Ausdruck der Divergenz. — Es seien in einem Punkte M (Fig. 6) mit den Koordinaten x, y, z, durch X, Y, Z die Komponenten des Vektors nach drei Koordinatenaxen bezeichnet. Wir setzen dabei voraus, dass diese Grössen X, Y, Z stetige Funktionen der Koordinaten x, y, z sind, und berechnen nun den aus der Fläche des elementaren Parallelepipeds $MABC$ mit den Seiten dx, dy, dz austretenden Fluss.

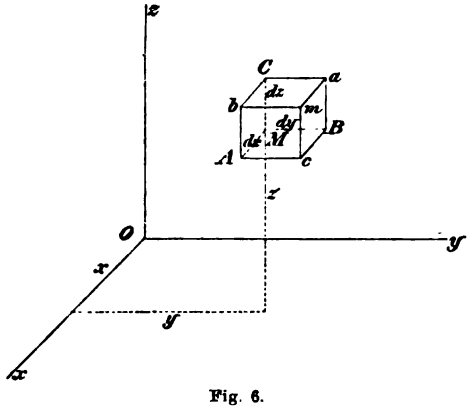

Fig. 6.

Durch die zu der Axe Ox senkrechte Fläche $MBaC$ tritt in das Parallelepiped ein Fluss ein, der gleich $X\,dy\,dz$ ist, durch die parallele Fläche $mbAc$ tritt aus dem Parallelepiped ein Fluss gleich $\left(X+\frac{\partial X}{\partial x}dx\right)dy\,dz$ aus; folglich tritt im ganzen in der Richtung Ox ein Fluss aus, der gleich der Differenz der beiden ist, nämlich

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \quad \text{oder} \quad \frac{\partial X}{\partial x}\,dv.$$

Analog erhalten wir in den Richtungen Oy und Oz bezw. die Flüsse

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\,dv \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial z}\,dv.$$

Daraus ist der ganze aus der Fläche des Parallelepipeds austretende Fluss

$$d\varphi = \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv,$$

und folglich ist die Divergenz des Vektors

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{1}$$

Die Konvergenz hat denselben Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen.

7. Solenoidische Verteilung. — Ist in jedem Punkte eines Raumes die Divergenz Null, dann sagt man, der Vektor besitzt darin *eine solenoidische Verteilung.**)

Wenn aber die Divergenz gleich Null ist, d. h. wenn der aus jedem Volumenelemente des Raumes austretende Fluss gleich Null ist, so ist auch der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss gleich Null [5]. Folglich gleicht die gegebene Definition der anderen: ein Vektor besitzt im Felde solenoidische Verteilung, wenn der aus einer geschlossenen Fläche austretende Fluss gleich Null ist; es ist dabei gleichgiltig, welche Gestalt die Fläche habe und wie dieselbe im Felde liege.

8. Niveauflächen. — Eine in jedem ihrer Punkte zu der Richtung des Vektors senkrechte Fläche nennt man *Niveaufläche.*

Für eine Niveaufläche vereinfacht sich der Ausdruck des Flusses, denn man hat, da in diesem Falle der Vektor mit seiner Normalkomponenten zusammenfällt, $\Theta = 0$, $f_n = f$, und folglich ist der Fluss durch den Ausdruck

$$\int_S f\,dS$$

gegeben. Wenn wir ein Stück einer Niveaufläche vom Inhalt S betrachten, durch welches der Fluss den Wert $\Phi = \int_S f\,dS$ hat, so können wir als den *Mittelwert des Vektors in dem Stücke S der Niveaufläche* den Wert f_m bezeichnen, den ein in jedem Punkte der betrachteten Fläche konstanter und zur Fläche senkrechter Vektor annimmt, wenn er durch S denselben Fluss hervorbringen soll, wie der Fluss, der von dem betrachteten Vektor hervorgebracht wird.

Der Mittelwert f_m ist also durch die Gleichungen definiert

$$f_m S = \int_S f\,dS,$$

$$f_m = \frac{\Phi}{S}. \tag{2}$$

*) Diese Bezeichnung rührt von Maxwell her, während Faraday hierfür den Ausdruck *spondyloidisch* gebrauchte.

Wenn die Fläche S in einem gegebenen Punkte nach Null konvergiert, so strebt f_m nach dem Werte f, den der Vektor in diesem Punkte besitzt.

Daraus folgt, dass man, wenn der Fluss Φ gegeben ist, einen angenäherten Wert f_m des Vektors in einem Punkte erhalten kann; einen Wert, der um so mehr dem exakten Wert f gleichkommt, je kleiner die um den Punkt betrachtete Fläche ist.

9. Linienintegral eines Vektors. — Es sei AMB (Fig. 7) eine beliebige, im Felde eines Vektors beschriebene Linie; man wähle auf derselben eine Richtung als die positive, z. B. die Richtung AB. Ferner sei $MF = f$ der Vektor in einem Punkte M der Linie, $MM' = ds$ ein von M aus positiv betrachtetes Element derselben Linie und ε der von f mit ds gebildete Winkel. Die Tangentialkomponente des Vektors, d. h. die Projektion von f auf die Tangente MT ist $f_s = f\cos\varepsilon$. Man bilde das Produkt $f_s ds$ für alle Elemente der Linie AB, dann summiere man alle diese unendlich kleinen Skalargrössen, d. h. man bilde das Integral

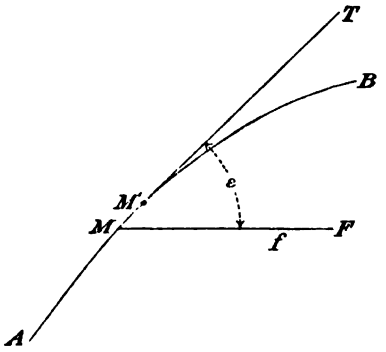

Fig. 7.

$$\int_{AB} f_s ds = \int_{AB} f\cos\varepsilon\, ds;$$

diesen Ausdruck nennt man *Integral* (oder *Fluss*) *des Vektors über die Linie* (oder *längs der Linie*) AB. Durch den am Fusse des Integralzeichens gesetzten Index AB soll daran erinnert werden, dass die Integration sich über die ganze Linie AB erstreckt, und ferner dass sie in der Richtung von A nach B geschieht. Also

$$\int_{AB} f_s ds = -\int_{BA} f_s ds.$$

In analoger Weise wie bei den Flüssen durch Flächen ergiebt sich, dass das Integral eines aus mehreren Vektoren resultierenden Vektors längs einer Linie gleich der algebraischen Summe der Integrale der einzelnen komponierenden Vektoren längs derselben Linie ist.

Die Linienintegrale der Vektoren werden algebraisch und nicht nach Art der Vektoren summiert; sie sind Skalar- und nicht Vektorgrössen.

10. Potential.*) — Im allgemeinen hängt der Wert des Integrals des Vektors längs einer Linie von der Form der Linie ab. Es kann aber auch sein, dass die Verteilung des Vektors eine solche ist, dass dessen Integral längs irgend einer im Felde beschriebenen Linie lediglich von der Lage der äussersten Punkte abhängt; dann ist das Integral für alle durch dieselben Endpunkte begrenzten Linien stets dasselbe und das Integral längs einer geschlossenen, sonst beliebigen Linie gleich Null. Für das Eintreten dieses uns besonders interessierenden Falles ist es notwendig und genügend, dass die zu integrierende Funktion $f_s ds$ das vollständige Differential einer Funktion der Koordinaten ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, und wir durch V eine Funktion der Koordinaten bezeichnen, welche wir *Potential* nennen werden, können wir setzen:

$$-dV = f_s ds, \tag{3}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s ds. \tag{4}$$

Das Potential ist daher, als durch die Integration einer Differentialgleichung definiert, bestimmt, abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten. Vollständig bestimmt ist dagegen die *Potentialdifferenz* zwischen den beiden Punkten A und B, d. h. das Integral des Vektors längs einer beliebigen die Punkte A und B verbindenden Linie, weil in diesem Falle die beiden gleichen, mit entgegengesetzten Vorzeichen auftretenden, additiven Konstanten sich heben.

Das Potential ist eine Skalargrösse.

Wenn man Orthogonal-Koordinaten wählt, hat man

$$f_s ds = X dx + Y dy + Z dz.$$

Damit ein solches Trinomium ein vollständiges Differential sei, müssen die folgenden drei Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Wenn diese Gleichungen bestehen, dann sind das Potential und die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten durch die Beziehungen bestimmt:

$$-dV = X dx + Y dy + Z dz, \tag{3'}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} (X dx + Y dy + Z dz). \tag{4'}$$

*) Diese Bezeichnung rührt von Gauss her, während unabhängig von ihm Green den Ausdruck *Potentialfunktion* gebrauchte; wir werden die kürzere Gauss'sche Bezeichnung anwenden.

Wir wollen den für uns ausserordentlich wichtigen Begriff *Potential* noch weiter erläutern.

Es sei das Feld eines Vektors gegeben, in welchem die obige Bedingung erfüllt wird, d. h. wo das Integral längs irgend einer Linie nur von der Lage ihrer Endpunkte abhängt.

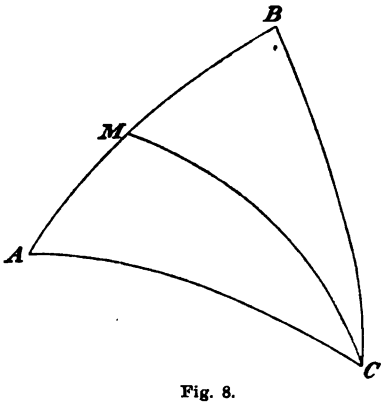

Fig. 8.

Im Felde wählen wir ganz willkürlich einen Punkt C (Fig. 8), durch eine beliebige Linie CM verbinden wir ihn mit einem anderen Punkte M und bezeichnen mit V das von M nach C längs dieser Linie genommene Integral. Der Wert von V hängt nicht von der Form der Linie, sondern nur von der Lage der Punkte C und M ab und, wenn der Punkt C als fest betrachtet wird, nur von der Lage des Punktes M; der Wert von V ist eine Funktion von denjenigen Veränderlichen, durch welche die Lage des Punktes M definiert wird. Sind V_A und V_B die Werte von V in den Punkten A und B, so kann das Integral, von A nach B längs der die Punkte A und B mit einander verbindenden, sonst beliebigen Linie AMB genommen, durch diese zwei Werte ausgedrückt werden. Und zwar ist das Integral längs der Linie AMB gleich demjenigen, das längs irgend einer anderen von A ausgehenden und in B endigenden Linie genommen ist; es ist also auch gleich dem längs der Linie ACB genommenen Integral. Nun ist der Wert des Integrals längs der Linie AC gleich V_A und jener des Integrals längs der Linie CB gleich $-V_B$, also ist

$$\int_{AB} f_s ds = V_A - V_B;$$

das von A nach B längs einer beliebigen, diese Punkte verbindenden Linie genommene Integral des Vektors ist gleich der Differenz der Werte, welche die Funktion V (der wir den Namen *Potential* gegeben haben) in den Punkten A und B besitzt.

Auch hieraus ergiebt sich, dass das *Potential in einem Punkte* bis auf beliebige, konstante Parameter, welche von der Wahl des Punktes C abhängen und der Integrationskonstanten entsprechen, die *Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten* dagegen vollständig definiert ist.

11. Bestimmung des Vektors durch das Potential. — Wenn in jedem Punkte der Wert des Potentials als Funktion der Koordinaten gegeben ist, so ist auch die Verteilung des Vektors bestimmt.

Um dies zu erklären, betrachten wir anstatt der im vorigen Abschnitte angenommenen endlichen Linie AB ein einfaches Element ab (Fig. 9), nehmen wir die Richtung von a nach b positiv an, und bezeichnen wir die Länge des Elementes ab mit ds. Anstatt des oben betrachteten Integrals haben wir jetzt ein einfaches Element, welches wir durch $f_s ds$ ausdrücken können, wenn f_s die Projektion des Vektors f auf die Richtung ab ist.

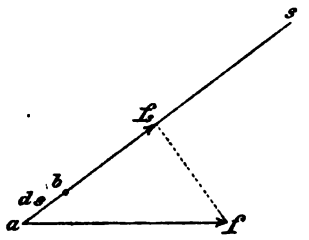

Fig. 9.

Wenn wir andererseits nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Differentialrechnung mit $\frac{dV}{ds}$ den Limes des Verhältnisses $\frac{V_b - V_a}{ds}$ darstellen, wobei wir, die gegebene Richtung ab festhaltend, ds bis zu Null konvergieren lassen, so können wir schreiben:

$$V_a - V_b = -\frac{dV}{ds} ds.$$

Dadurch wird die Gleichung (3), welche die Definition des Potentials vorstellt, in dem jetzt betrachteten Falle zu

$$f_s ds = -\frac{dV}{ds} ds.$$

Daher

$$f_s = -\frac{dV}{ds}. \tag{5}$$

Das Vorzeichen — zeigt, dass die positive Richtung des Vektors diejenige ist, nach welcher das Potential sinkt.

Betrachten wir zwei spezielle, wichtige Fälle:

I. Das Element ds gehöre einer Niveaufläche, d. h. einer zum Vektor senkrechten Fläche an; die Vektorkomponente nach ds ist gleich Null, $f_s = 0$, folglich $\frac{dV}{ds} = 0$. Das gilt für jeden Punkt der Niveaufläche, und man hat daher für dieselbe

$$V = \text{Konst.}$$

Eine Niveaufläche ist somit eine *Aquipotentialfläche.*

II. Wenn wir das Element ds auf der Normalen zu der Niveaufläche wählen, die durch den betrachteten Punkt geht, und dasselbe mit dn bezeichnen, so ist $f_s = f$ und daher

$$f = -\frac{dV}{dn}. \tag{5'}$$

12. Flusslinien und Flussröhren. — *Flusslinie* nennt man eine Linie, in deren sämtlichen Punkten die Richtung des dort existierenden Vektors mit der Tangente der Linie zusammenfällt. Wenn der Vektor stetige Verteilung hat, so geht durch jeden Punkt eines Feldes eine, aber auch nur eine einzige Flusslinie.

Betrachten wir nun in dem Felde eines Vektors einen Punkt A (Fig. 10); Aa sei die Richtung des Vektors. Auf Aa nehmen wir einen unendlich nahe bei A gelegenen Punkt B; die Richtung, die in diesem Punkte der Vektor besitzt, sei Bb. In ähnlicher Weise sei C ein auf Bb genommener, unendlich nahe bei B liegender Punkt und Cc die Richtung des Vektors in demselben und so weiter. Die Polygonallinie $ABC\ldots$ hat als Limes eine gekrümmte Linie, deren Tangenten in jedem ihrer Punkte mit dem Vektor dieselbe Richtung haben; sie ist die Flusslinie, die durch den Punkt A geht.

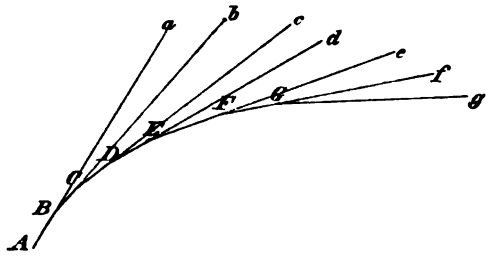

Fig. 10.

Der geometrische Ort der Flusslinien, die durch die Punkte einer geschlossenen Linie AB (Fig. 11) hindurchgehen, ist eine röhrenförmige Fläche $ABA'B'$. Den von dieser Fläche begrenzten geometrischen Körper nennt man *Flussröhre;* die Fläche selbst nennt man die *Fläche der Flussröhre.*

Weil der Vektor in jedem Punkte der Fläche einer Röhre wie die Tangente gerichtet ist, so ist der Fluss eines Vektors durch einen beliebigen Teil der Fläche einer Flussröhre gleich Null.

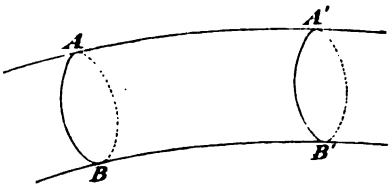

Fig. 11.

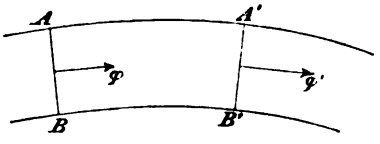

Fig. 12.

Betrachten wir in einem Felde mit solenoidischer Verteilung einen durch zwei beliebige Schnitte AB und $A'B'$ begrenzten Teil einer Flussröhre (Fig. 12). Die Fläche der Röhre und die beiden Schnitte bilden eine geschlossene Fläche, durch welche (der Solenoidität wegen) der austretende Fluss gleich Null ist. — Durch die Fläche der Röhre selbst

tritt nun kein Fluss aus; durch die Schnitte AB und $A'B'$ müssen daher zwei numerisch gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Flüsse austreten.

Wenn einer davon aus dem Raume $ABA'B'$ austritt, so tritt der andere in den Raum ein; beide Flüsse haben also dieselbe Richtung. Nun sind aber die Schnitte AB und $A'B'$ beliebig gewählt, woraus wir schliessen, dass durch alle Schnitte der Röhre der Fluss denselben Wert hat und in derselben Richtung verläuft: *In einem Felde mit solenoidischer Verteilung ist der Fluss längs einer Flussröhre konstant.*

Dieser Satz entspricht dem sogenannten *Kontinuitätssatz* der Hydraulik.

Eine Folge dieser Eigenschaft ist, dass im Innern eines Raumes mit solenoidischer Verteilung keine Flussröhre Anfang oder Ende haben kann: keine Flusslinie kann in einem Teile des Feldes, wo dessen Verteilung solenoidisch ist, beginnen oder endigen. — Wenn das Feld den ganzen Raum einschliesst, und überall die Verteilung solenoidisch ist, so dehnen sich die Flusslinien bis ins Unendliche aus, oder sie sind geschlossene Linien. Ein Feld mit solenoidischer Verteilung kann in viele endliche oder unendlich kleine röhrenförmige Teile zerlegt werden, in welchen der Fluss des Vektors konstant ist, wie jener der Geschwindigkeit eines die Röhre füllenden und unveränderliches Volumen behaltenden Fluidums wäre. Diese Betrachtungen erklären uns auch die Wahl des Ausdrucks *solenoidisch*, welcher in Anlehnung an das griechische Hauptwort σωλήν = Röhre gebildet ist.

13. Änderung des Vektors längs einer unendlich dünnen Flussröhre. — Denken wir uns in einem Felde mit solenoidischer Verteilung eine unendlich dünne Flussröhre $ABA'B'$ (Fig. 13), und betrachten wir die hierzu senkrechten, sonst beliebigen Schnitte AB und $A'B'$, deren Flächen dS und dS' seien. Wenn wir mit f und f' die Werte des Vektors in den beiden Schnitten AB und $A'B'$ bezeichnen, so haben die Flüsse durch die beiden Schnitte die Werte $f\,dS$ und $f'\,dS'$, und, da diese gleich sind, so hat man:

$$f\,dS = f'\,dS', \quad \frac{f}{f'} = \frac{dS'}{dS};$$

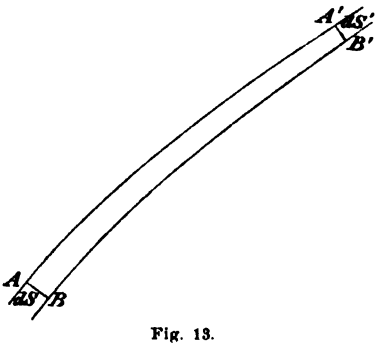

Fig. 13.

oder: längs einer unendlich dünnen Röhre variiert der Vektor umgekehrt proportional dem Querschnitte derselben. Wenn die Röhre sich verbreitert, sinkt der Vektor im Werte und umgekehrt. Wenn $dS = dS'$,

so ist $f = f'$; wenn eine Flussröhre konstanten Querschnitt hat, so hat in ihr der Vektor konstanten Wert.

14. Einheitsröhren. — Ist der Fluss durch die Schnitte einer Flussröhre gleich demjenigen, der in dem gewählten Massstabe als Einheit angenommen wird, so nennt man diese Röhre *Einheitsröhre.*

Eine beliebige, hinreichend grosse Flussröhre lässt sich immer in Einheitsröhren zerteilen; sie kann immer als ein Bündel solcher Röhren betrachtet werden. Ebenso kann man das ganze Feld, wenn solenoidisch, in Einheitsröhren zerlegen. Der Fluss durch eine beliebige, im Felde befindliche Fläche ist gleich der Zahl der Einheitsröhren, die diese Fläche durchsetzen; der Fluss, der eine geschlossene Linie durchdringt, ist gleich der Zahl der von dieser umschlossenen Einheitsröhren. Daher sind in einem solenoidischen Felde alle Flächen, welche dieselbe Begrenzung haben, von demselben Fluss durchsetzt; der Fluss hängt nicht von der Form der Fläche, sondern nur von ihrer Begrenzungslinie ab.

15. Darstellung des Feldes eines Vektors. — Durch ein Modell oder eine Zeichnung, worin materiell oder graphisch Niveauflächen oder Flusslinien in passender Zahl und Lage beschrieben sind, ist es stets möglich, das Feld eines Vektors vollständig darzustellen, so dass man aus dem Modell oder aus der Zeichnung schliessen kann, wie von Punkt zu Punkt die Grösse und die Richtung des Vektors variieren.

a) *Darstellung des Feldes durch Niveauflächen.* — Es ist einleuchtend, dass ein Modell oder eine Zeichnung, worin mehrere einander genügend nahe Niveauflächen dargestellt sind, auf einen Blick erkennen lässt, welche Richtung der Vektor in jedem Punkte hat; und zwar ist diese Richtung senkrecht zur Niveaufläche, die durch den betrachteten Punkt geht. Wenn der Vektor sich auf einer der im Modell oder in der Zeichnung dargestellten Flächen befindet, so ist die Richtung direkt bestimmt; wenn er nicht auf einer der materiell dargestellten Flächen, sondern zwischen zwei solchen liegt, so ist es leicht, sich mit Hilfe der benachbarten Flächen mit genügender Annäherung die Niveaufläche zu denken, die durch den Punkt gehen müsste, und folglich zu sehen, wie ungefähr die Richtung der Normalen dieser Fläche ist.

Aber dadurch, dass man die darzustellenden Niveauflächen passend wählt, kann man mehr erreichen, nämlich, dass das Modell oder die Zeichnung ungefähr nicht nur die Richtung, sondern auch den Wert des Vektors angiebt. Es genügt hierfür, dass die Potentialdifferenz von benachbarten, gezeichneten oder konstruierten Flächen konstant ist, und dass

dieselben einander genügend nahe sind, damit die Stücke von Flusslinien, welche von zwei einander folgenden Äquipotentialflächen begrenzt sind, praktisch mit geradlinigen Strecken vertauscht werden können. Nennen wir Δn eines dieser Segmente und ΔV die konstante Differenz zwischen den Potentialen auf zwei benachbarten Niveauflächen. Der Quotient $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ hat als Limes $\frac{dV}{dn}$ und stellt folglich, wenn, wie angenommen, Δn klein ist, einen angenäherten Wert von $\frac{dV}{dn}$ dar.

Nun ist aber $\frac{dV}{dn}$, abgesehen vom Vorzeichen, der Wert von f. Es reicht also aus, die in der Konstruktion des Modelles oder der Zeichnung gewählte konstante Differenz ΔV anzugeben, um in jedem Punkte des Feldes durch die einfache Messung einer Länge Δn den Wert von f bestimmen zu können.

Die Wahl der Niveauflächen, derart dass die Potentialdifferenz zwischen zwei benachbarten derselben konstant ist, dient nicht nur dazu, die für die Berechnung des Wertes f auf die beschriebene Weise notwendigen Angaben auf die alleinige Kenntnis der Grösse ΔV zu reduzieren, sondern auch dazu, aus dem Modelle auf den ersten Blick die Verteilung des Vektors im Felde erkennen zu lassen.

Und in der That, wenn ΔV konstant ist, sagt die angenäherte Gleichung

$$f = -\frac{\Delta V}{\Delta n},$$

dass f als umgekehrt proportional zu Δn angenommen werden kann; wo Δn klein ist, wo also die gezeichneten oder konstruierten Äquipotentialflächen einander nahe sind, hat der Vektor einen grossen Wert; wo Δn gross ist, wo also die Äquipotentialflächen weit auseinander sind, besitzt der Vektor einen kleinen Wert.

Setzen wir $\Delta V = 1$, so giebt uns der reciproke Wert des Abstandes Δn mit umgekehrtem Vorzeichen direkt den Tensor des Vektors.

b) *Darstellung des Feldes durch Flusslinien.* — Stellen wir uns das Feld in Einheitsröhren zerlegt vor, und denken wir uns dann, um sie bequem darstellen zu können, dass sie sich quer zusammenziehen. Denken wir uns sogar, dass diese Zusammenziehung so weit vor sich geht, bis die Einheitsröhren unendlich dünn werden, und jede derselben zu einer einfachen Flusslinie zusammenschrumpft, die als der Kern oder ein Abbild des Verlaufs der Einheitsröhre angesehen werden kann. Wir erhalten auf diese Weise, um die ursprünglichen Einheitsröhren darzustellen, lediglich ebenso viele Flusslinien. — Eine Zeichnung oder ein Modell,

worin diese Flusslinien dargestellt sind, giebt uns ebenfalls eine deutliche Veranschaulichung der Verteilung des Vektors in dem Felde.

Um die eben beschriebene Darstellung materiell auszuführen, kann man auf folgende Weise vorgehen. Man zieht in der Zeichnung oder im Modell eine Niveaufläche, und auf dieser verteilt man Punkte so, dass in jedem ihrer Teile die Anzahl derselben den durch den Flächenteil hindurchgehenden Fluss in dem gewählten Masssystem ausdrückt. Durch jeden der gezeichneten Punkte zieht man eine Flusslinie. Die eben ausgedrückte Bedingung, nach welcher die Punkte auf der bei der beschriebenen Operation gewählten Niveaufläche verteilt worden sind, muss wegen der solenoidischen Eigenschaft des Feldes auch für alle anderen Niveauflächen zutreffen.

Wenn ein so konstruiertes Modell oder eine so hergestellte Zeichnung gegeben ist, und man den Fluss durch irgend eine Fläche kennen will, so genügt es, die Flusslinien zu zählen, welche durch dieselbe innerhalb deren Begrenzung hindurchgehen.

Durch Division der Zahl der die betrachtete Fläche durchsetzenden Linien durch die Fläche selbst erhält man [8] den Mittelwert der Normalkomponenten des Vektors. Ist der Flächenteil genügend klein, sodass die Verteilung der Punkte auf demselben als gleichförmig angesehen werden kann, so ergiebt die genannte Division ohne Weiteres den Wert der Normalkomponenten. Wenn die Fläche eine Ebene ist und einer Niveaufläche angehört, hat man sofort den Vektor. Mit anderen Worten, es ist der Wert des Vektors durch die Zahl der Linien dargestellt, welche durch die auf einer Niveaufläche angenommenen Flächeneinheit hindurchgehen.

Auf diese Weise genügt die durch die Flusslinien gegebene Darstellung des Feldes zur Bestimmung des Vektors in jedem Punkte, nicht nur der Richtung, sondern auch der Grösse nach. Dort wo die Linien dichter bei einander sind, ist der Vektor grösser, dort wo sie weiter auseinander liegen, ist er kleiner. Wenn es auch nicht immer leicht ist, ein solches Modell oder Zeichnung, wie soeben beschrieben, zu konstruieren, so ist es doch immer möglich sich dieselben vorzustellen. Auf der Vorstellung des Feldes in der beschriebenen Weise beruhen häufig in der Sprache des Elektrotechnikers gebrauchte Ausdrücke. So spricht man oft von *Zahl der Flusslinien, die eine Fläche durchsetzen* und von *Flusslinienzahl pro Flächeneinheit*, statt von *Fluss des Vektors durch die Fläche* und von *Wert des Vektors* zu sprechen.

16. Gleichförmiges Feld. — Besondere Erwähnung verdient der Fall, in welchem alle Flusslinien parallele Gerade sind. Man kann leicht er-

kennen, dass in einem solchen Felde der Vektor in allen Punkten denselben Wert hat. Nämlich: I. Alle Flussröhren haben konstanten Querschnitt, und deshalb hat der Vektor, nach dem im Abschnitte [13] bewiesenen Satze, in allen Punkten einer Flusslinie denselben Wert. — II. Die Äquipotentialflächen, welche zu den Flusslinien senkrecht verlaufen, sind in diesem Falle lauter parallele Ebenen. Deshalb ist der Abstand dn zwischen zwei Äquipotentialflächen, zwischen denen die Potentialdifferenz ΔV herrscht, derselbe für die ganze Ausdehnung dieser Flächen; folglich hat der Vektor [11] $-\frac{dV}{dn}$ in allen Punkten einer beliebigen Niveaufläche denselben Wert. Somit ist der Vektor in jedem Punkte des Feldes konstant. Ein solches Feld, wie das eben besprochene, wo der Vektor in allen Punkten denselben Wert und dieselbe Richtung hat, heisst *gleichförmig* oder *homogen*.

§ 2.

Kraftfelder.

17. Massen oder Mengen von Agens. — Unter allen Vektorgrössen hat der Vektor *Kraft* besondere Wichtigkeit. In der Physik hat man oft mit Teilen des Raumes zu thun, welche die Eigenschaft besitzen, dass man in sie nur gewisse Körper oder beliebige Körper unter bestimmten Bedingungen zu bringen braucht, damit auf sie Kräfte wirken. Ein Raum, der diese Eigenschaft besitzt, heisst ein *Kraftfeld*.

In einem solchen Kraftfelde variiert im allgemeinen die Kraft, die auf einen gegebenen Körper wirkt, von Punkt zu Punkt; für einen und denselben Punkt variiert sie, abgesehen von zeitlichen Änderungen, je nach der Natur oder den Dimensionen des in dem Punkte betrachteten Körpers.

Ein Kraftfeld kann den ganzen Raum einschliessen oder von bestimmten Flächen begrenzt sein.

Ein Beispiel eines unbegrenzten Kraftfeldes bietet uns das Feld der Schwerkraft. Wir können wahrnehmen, dass auf jeden beliebigen Körper, wo immer er sich auch in dem unseren Forschungen zugänglichen Raume befinde, ununterbrochen Kräfte einwirken. Dieser Raum ist also, unserer Definition nach, ein Kraftfeld. Die Stärke der Resultierenden der Kräfte, die in den Punkten des Körpers angreifen, hängt vom Körper selbst und ferner von dem Ort, wo er sich befindet, ab; es ist bekannt, dass die gegenseitige Vergleichung zwischen den Kräften, die an einem und demselben Orte auf verschiedene Körper wirken, dazu dient, die Massen

dieser Körper untereinander zu vergleichen, während dagegen die Vergleichung zwischen den Kräften, die auf einen und denselben Körper an verschiedenen Orten wirken, dazu dient, den Wert der Schwerkraft oder das Gewicht des Körpers an verschiedenen Punkten zu bestimmen, d. h. die verschiedenen Punkte des Feldes unter sich zu vergleichen.

Die Schwerkraft wirkt auf alle Körper; es giebt aber Kraftfelder, in denen nur auf einige Körper, oder auf Körper in gewissen Zuständen Einwirkungen stattfinden. Um auszudrücken, dass ein Körper in einem solchen Kraftfelde sich befinde und den in ihm wirksamen Kräften unterliege, können wir sagen, jener Körper besitzt ein *Agens*. Damit brauchen wir auf keine Hypothese über die innere Natur der eben erwähnten besonderen Zustände einzugehen, ebenso wie wir keine Hypothese über die Natur der Wärme aufstellen, wenn wir sagen, dass ein Körper warm ist.

Aber auch ohne zu wissen, worin ein Agens besteht, und ohne über seine Natur eine Hypothese aufzustellen, können wir das Agens als eine messbare Grösse behandeln und in Zahlen ausdrücken. Wir können in der That Mengen von Agens miteinander vergleichen. Man stelle sich einen kleinen Körper vor, einen materiellen Punkt, welcher, in das betreffende Kraftfeld gebracht, dort der Wirkung einer Kraft ausgesetzt ist. Wie das Vorhandensein dieser Kraft uns nach dem getroffenen Übereinkommen zu sagen berechtigt, der materielle Punkt besitze Agens, so kann die messbare Stärke der Kraft dazu dienen, die *Menge* oder die *Masse* des Agens selbst zu bestimmen. Wenn zwei nach einander an einen und denselben Ort des Feldes gebrachte materielle Punkte dort der Stärke und Richtung nach gleichen Kräften ausgesetzt sind, so sagen wir, dass sie *gleiche Mengen* oder *gleiche Massen* von Agens enthalten; wenn in ihnen ungleiche Kräfte angreifen, so sagen wir, dass sie ungleiche Massen enthalten, und zwar, wenn sich die beiden Kräfte wie $m:n$ verhalten, dass die in den Körpern enthaltenen Massen in demselben Verhältnisse stehen.

Somit haben wir, wenn wir die Werte der Massen des betrachteten Agens durch Zahlen ausdrücken wollen, nichts anderes zu thun, als eine Masseinheit, d. h. eine vollkommen bestimmte Masse, zu wählen und ihren Wert mit der Zahl *Eins* zu bezeichnen. Um ferner die *Verteilung der Kräfte* im Felde zu prüfen, genügt es, an die verschiedenen Orte immer denselben Körper zu bringen und die in ihm angreifenden Kräfte miteinander zu vergleichen. Wir wollen mit *Prüfmasse* die Masse bezeichnen, die man im Felde verschiebt, um die Verteilung der Kräfte in demselben zu studieren. Wenn man als Prüfmasse jene Masse von Agens wählt, welche als Masseinheit angenommen wurde, so bezeichnet man die Richtung und die Grösse der Kraft, welche auf sie einwirkt, als die *Richtung* und die *Stärke des Feldes* in dem betrachteten Punkte. Die Stärke des Feldes

in einem Punkte nennt man auch den *Wert der Kraft* oder einfach die *Kraft* in dem Punkte.

Wenn f die Stärke des Feldes in einem Punkte ist und auf einen kleinen, in diesem Punkte befindlichen Körper in der Richtung des Feldes eine Kraft von der Stärke mf angreift, so besitzt, nach der angegebenen Definition der Masse, der kleine Körper eine Masse m von dem betreffenden Agens. Es kann vorkommen, dass der kleine Körper nicht in der Richtung des Feldes, sondern in der entgegengesetzten einen Antrieb erfährt, man sagt dann, er enthält eine *negative* Masse. Diese beiden betrachteten Fälle sind die einzigen, die in den vorhandenen Kraftfeldern vorkommen können. Eine beliebige Masse kann in der Richtung des Feldes oder in der derselben entgegengesetzten, aber nie in anderen Richtungen von den Kräften des Feldes angegriffen werden.

18. Potential. Arbeit. — Alle für die Vektorfelder besprochenen Begriffe können auch auf die Kraftfelder angewandt werden. Es ist also nicht nötig, für diesen speziellen Fall die Begriffe: *Kraftfluss durch eine Fläche, Kraftintegral längs einer Linie, Niveaufläche, Kraftlinie und -röhre, solenoidische Verteilung, Potential* u. s. w. eigens zu definieren. Bei den Kraftfeldern erhält das Potential eine hervorragende physikalische Bedeutung. Das Potential V in einem Punkte M des Feldes (Fig. 14) ist das Integral des Vektors längs irgend einer Linie, die diesen Punkt M mit einem im Felde als festliegend angesehenen Punkt C verbindet:

$$V = \int_{MC} f_s ds.$$

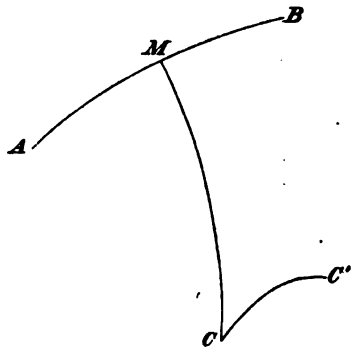

Fig. 14.

Wenn nun der Vektor f eine Kraft ist, so stellt das Produkt $f_s ds$ die *Arbeit* dar, welche von jener Kraft geleistet wird, wenn die Einheitsmasse die Verschiebung ds erleidet; das Integral $\int_{MC} f_s ds$, d. h. das Potential, stellt dann die gesamte Arbeit dar, die die Kraft leistet, wenn die Einheitsmasse die Linie MC durchläuft, die im Punkte M beginnt und im festen Punkte C endigt.

Betrachtet man eine beliebige Linie zwischen den Punkten A und B, so hat man

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s ds,$$

und daher ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B die Arbeit, welche die Kraft leistet, während die Einheitsmasse unter der Wirkung dieser Kraft einen beliebigen Weg vom Punkte A zum Punkte B zurücklegt.

Wenn anstatt der Einheitsmasse eine Masse m bewegt wird, ist die auf sie wirkende Kraft mf, also ist die geleistete Arbeit, wenn die Masse m von A nach B verschoben wird,

$$m\int_{AB} f_s ds = m(V_A - V_B).$$

Die Arbeit, welche die Kraft leistet, während die Masse m sich vom Punkte A zu einem anderen Punkte B verschiebt, ist das Produkt aus der Masse und der Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten. Deshalb giebt, wenn man die geleistete Arbeit und die bewegte Masse kennt, ihr Verhältnis die Potentialdifferenz zwischen den Punkten, zwischen welchen die Verschiebung stattgefunden hat.

Das Potential ist bis auf eine Konstante definiert, welche von der Wahl des willkürlichen festen Punktes C abhängt. Indem man den Punkt C variiert und ihn z. B. nach C' bringt, variiert das Potential in allen Punkten um eine konstante Grösse, welche die Arbeit längs der Linie CC' darstellt. Unter den unendlich vielen Punkten C wird man immer den Punkt wählen können, für den die Integrationskonstante ein Maximum wird, d. h. für den das Potential bei den gegebenen Feldbedingungen seinen höchsten Wert hat. Bei dieser Wahl stellt das Potential in einem Punkte die grösste Arbeit dar, welche die Kraft leisten kann, während die Masse *Eins* im Felde von diesem Punkte aus bewegt wird, d. h. die Arbeit, welche man lediglich dadurch zur Verfügung hat, dass die Masse *Eins* sich in diesem Punkte befindet; es stellt daher eine *Energie der Lage* oder eine *potentielle Energie* dar. In den Kraftfeldern ist die Benennung Potential sehr geeignet für dessen physikalische Bedeutung; jene Benennung wird aber auch in umfassenderem Sinne gebraucht, und sie wird, wie wir gesehen haben, ganz allgemein bei den Vektorfeldern und nicht nur bei den Kraftfeldern angewandt.

Betrachtet man eine beliebige Linie zwischen zwei Punkten, so ist die von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit, während sich die Masse *Eins* längs der Linie verschiebt, gleich der Verminderung der Energie, oder, was dasselbe bedeutet, gleich der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten.

Wenn die bewegliche Einheitsmasse eine geschlossene Linie durchläuft, indem sie zu dem ursprünglichen Punkte zurückkommt und die gesamte in der durchlaufenen Strecke geleistete Arbeit Null ist, findet man, zum Ausgangspunkt zurückgekehrt, dasselbe Potential, das im An-

fang in diesem Punkte vorhanden war; wenn dagegen eine gewisse Arbeit gewonnen oder verzehrt wird, findet man bei der Rückkunft zu dem Punkte in demselben ein anderes Potential, als man beim Beginn der Bewegung hatte; die Differenz zwischen beiden Werten gleicht der positiven oder negativen, längs der durchlaufenen Linie verrichteten Arbeit. Im ersten Falle ist das Potential eine einwertige oder *monodrome*, im zweiten Falle eine mehrwertige oder *polydrome* Funktion.

Wenn im Felde geschlossene Kraftlinien vorkommen, so ist das Potential sicher polydrom, denn die Arbeit längs einer Kraftlinie kann nicht Null sein, da die Kraft beständig die gleiche Richtung wie die Bewegung hat. Physikalisch aber kann man, wenn man eine solche geschlossene Linie vor sich hat, erlangen, dass die Masse sich längs der Linie unendlich lange fortbewegt, während sie fortgesetzt Arbeit leistet. Damit dies möglich ist, ist es nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie nötig, dass im Felde Arbeit verrichtet wird. Es folgt daraus, dass es in einem nur durch statische Zustände bedingten Felde keine geschlossenen Kraftlinien geben kann und das Potential in einem solchen Felde eine monodrome Funktion ist, während in einem durch Verrichtung von Arbeit in seinem Bestande aufrechterhaltenen Felde das Potential eine polydrome Funktion sein kann.

§ 3.

Newton'sche Kraftfelder.

19. Newton'sche Kräfte. — Ein besonders wichtiger Fall, auf den wir die erworbenen Kenntnisse anwenden wollen, ist der der *Newton'schen Kräfte*. Diesen Namen erteilt man den Kräften, deren Richtung bestimmt ist durch die gerade Verbindungslinie der materiellen Punkte, zwischen welchen die Kräfte wirken, und deren Intensität umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen diesen Punkten ist.*) Newton'sche Kräfte sind u. a. diejenigen, welche, von der allgemeinen Gravitation bedingt, unter den Himmelskörpern wirken. Zur Erklärung der Bewegungen dieser Körper wurde von Newton zuerst das nach ihm benannte Kraftgesetz, das die soeben ausgesprochenen Bedingungen enthält, aufgestellt.

Was uns die Erfahrung unmittelbar lehrt, ist die Existenz der Anziehung oder Abstossung zwischen gewissen materiellen Punkten und die

*) Newton gab zuerst eine umfassende mathematische Theorie der Bewegungen der Himmelskörper unter Zugrundelegung einer zwischen ihnen wirkenden Kraft von den oben bezeichneten Eigenschaften. Man kann daher mit Recht derartige Kräfte abkürzend nach seinem Namen bezeichnen.

Beziehung zwischen den Kraftintensitäten und den Entfernungen dieser Punkte; aber die einfachen Betrachtungen, welche die Existenz dieser Kräfte nachweisen, genügen nicht, um die Ursache, welche sie hervorvorbringt, und auch nicht den Sitz dieser Ursache entdecken zu lassen. Doch für die rein mathematische Behandlung der Newton'schen Kraftfelder ist es nicht nötig, auf die Betrachtung der Ursachen zurückzugreifen, deren Vorhandensein die Kräfte selbst ihre Entstehung verdanken; unbeschadet der Strenge oder der Allgemeinheit der Schlussfolgerungen kann man für die Newton'schen Kräfte den Begriff *Agens* heranziehen [17] und denken, dass diese Kräfte von Massen oder Mengen von Agens herrühren, welche in den Punkten enthalten sind, zwischen denen die Kräfte wirken.

Betrachten wir zwei in der Entfernung r von einander gelegene materielle Punkte M und M', zwischen welchen eine Newton'sche Kraft wirkt. Der Definition nach ist eine solche Kraft proportional $\frac{1}{r^2}$; man weiss ferner, dass die von M auf M' wirkende Kraft gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Kraft ist, die von M' auf M wirkt. Wir betrachten nun den materiellen Punkt M wie einen Punkt, welcher in dem von M' herrührenden Kraftfelde gelegen ist. Weil der in diesem Felde gelegene Punkt M von einer Kraft angegriffen wird, so können wir sagen [17], dass M ein Agens enthält, und dass dieses eine Masse m besitzt, welche proportional der Kraftintensität ist. Betrachten wir in ähnlicher Weise den Punkt M' wie einen Punkt, der in dem vom Punkte M herrührenden Felde gelegen ist, so können wir wieder sagen, dass er, weil auf ihn eine Kraft wirkt, eine Masse m' von Agens enthält, und dass diese proportional der Kraft ist. Es ist also die Kraft proportional $\frac{1}{r^2}$ und den Massen m und m', welche in den beiden Punkten konzentriert sind. Wenn also F die Stärke der Kraft bezeichnet und k einen konstanten Proportionalitätsfaktor darstellt, dessen Wert von der Wahl der Masseinheiten und von der Natur des zwischen den Punkten gelegenen Mediums abhängt, so haben wir:

$$F = k\frac{mm'}{r^2}. \tag{6}$$

Da für die Kräfte, die bei dem Magnetismus und der Elektrizität vorkommen, diese Beziehung experimentell von Coulomb bestätigt worden ist, so heisst sie für diese Gebiete der Physik: *Coulomb'sches Gesetz.*

Setzen wir voraus, die Identität $m = m'$ bestehe, welche in jedem Falle experimentell untersucht werden kann, indem man die Gleichheit der Kräfte konstatiert, welche auf die beiden Massen wirken, wenn sie

nacheinander in einen und denselben Punkt eines gegebenen Feldes gebracht werden. Die Coulomb'sche Formel giebt dann:

$$F = k\frac{m^2}{r^2}.$$

Wenn, wie es nahe liegt, der Konstanten k ein positiver Wert zugeschrieben wird, ergiebt sich die Kraft F positiv. Wir müssen daher als *positive Kraft* eine anziehende betrachten, wenn die Erfahrung lehrt, dass zwei gleiche Massen sich anziehen, und eine abstossende, wenn die Erfahrung angiebt, dass zwei gleiche Massen sich abstossen. Im Falle der Schwere muss man als positive Kraft eine anziehende, in den Fällen dagegen, die Gegenstand unseres Studiums sind, werden wir als positive Kraft eine abstossende betrachten. Dies werden wir von jetzt an thun und annehmen, dass zwei Massen m und m' gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, je nachdem sie sich abstossen oder anziehen.

20. Potential in den Newton'schen Kraftfeldern. — Es sei der die Masse *Eins* enthaltende materielle Punkt M (Fig. 15) in einem Kraftfelde gelegen, das von einer Masse m hervorgebracht wird, welche in einem um $Mm = r$ entfernten Punkte m konzentriert ist. Auf jenen materiellen Punkt wirkt eine Kraft

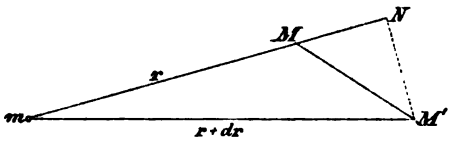

Fig. 15.

$$k\frac{m}{r^2}.$$

Wenn unter der Wirkung einer solchen Kraft der Punkt M sich um eine unendlich kleine Strecke verschiebt und nach dem Punkte M' gelangt, der sich in der Entfernung $mM' = r + dr$ von der Masse m befindet, so leistet die Kraft eine Arbeit

$$k\frac{m}{r^2} \cdot MN,$$

wobei MN die Projektion von MM' auf die Gerade mM ist. Wenn aber MM' unendlich klein ist, wie wir vorausgesetzt haben, so fällt die Senkrechte $M'N$ auf mM mit dem Bogenstück eines Kreises, dessen Mittelpunkt m ist, zusammen; man hat daher $MN = mM' - mM = dr$ und für den Ausdruck der Arbeit

$$km\frac{dr}{r^2}$$

d. h., wenn c eine willkürliche Konstante ist,

$$-d\left(k\frac{m}{r} + c\right).$$

Wenn man anstatt eines von einer einfachen Masse m herrührenden Feldes ein solches hat, welches von einer beliebigen Anzahl von in ebensovielen Punkten gelegenen Massen herrührt, so leistet die Resultante der Kräfte, die diese Massen auf den materiellen Punkt M ausüben, während dieser sich von M nach M' verschiebt, eine Arbeit, welche gleich der Summe mehrerer Arbeiten ist, deren jede durch die vorher ermittelte Formel ausgedrückt wird. Für den Wert dieser Summe kann man schreiben

$$-d\left(k\sum_r^m + C\right),$$

worin C eine willkürliche Konstante ist. Die einer unendlich kleinen Verschiebung des materiellen Punktes M entsprechende Arbeit ist also durch das vollständige Differential einer Funktion der Koordinaten des beweglichen Punktes ausgedrückt, oder anders gesagt, *die im Felde vorhandenen Kräfte besitzen ein Potential.*

Bezeichnen wir mit V das Potential, so wird die der unendlich kleinen Verschiebung des Punktes M entsprechende Arbeit durch $-dV$ ausgedrückt; und wenn wir diesen Ausdruck mit dem für dieselbe Arbeit eben ermittelten vergleichen, sehen wir, dass

$$V = k\sum\frac{m}{r} + C. \tag{7}$$

Nach der Wahl eines bestimmten Wertes für die willkürliche Konstante C hat dieses Potential für jeden Punkt des Raumes einen einzigen Wert.

Infolgedessen ist die Arbeit $V_A - V_B$, welche die Kräfte des Feldes leisten, wenn der bewegliche materielle Punkt sich vom Punkte A zu einem anderen Punkte B verschiebt, unabhängig von der Bahn des beweglichen Punktes und hängt nur von der Lage des Anfangspunktes A und des Endpunktes B ab. Wenn der bewegliche Punkt eine geschlossene Linie durchläuft und zu dem Anfangspunkte zurückkehrt, so ist die Arbeit gleich Null. In den Newton'schen Kraftfeldern können wir keine geschlossenen Kraftlinien treffen.

21. Energie. — Das Potential V in einem Punkte M des Feldes stellt [18], abgesehen von einer Konstanten, die Energiemenge dar, die durch das Vorhandensein der Masse *Eins* in dem betr. Punkte disponibel wird.

Wenn man im Punkte M anstatt der bis jetzt betrachteten Masse *Eins* eine andere beliebige Masse m' hat, so ist die zur Verfügung stehende Energie, wenn der bewegliche Punkt M sich im Kraftfelde in einem Punkte, wo das Potential V herrscht, befindet, durch das Produkt

$$m'V$$

gegeben.

Bei diesen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass die Massen m, die das Feld erzeugen, fest im Raume seien, und dass die im Felde bewegliche Masse m' auf die Stärke desselben keinen Einfluss ausübe. Nun legen wir uns eine allgemeinere Frage vor. Gegeben ist ein beliebiges System von materiellen Punkten, welche die Massen m, m_1, m_2, m_3, $\cdots$ enthalten; alle diese Punkte oder einige derselben sind beweglich. Wie drückt sich nun die gesamte von den Kräften geleistete Arbeit aus, welche einer unendlich kleinen Veränderung des Systems d. h. einer unendlich kleinen Verschiebung der Massen m, m_1, m_2, m_3, $\cdots$ entspricht? Um diese Frage zu beantworten, genügt es, zu bemerken, dass die Kraft zwischen zwei der gegebenen Massen, z. B. zwischen m und m_1, die Arbeit

$$k\frac{mm_1}{r^2}\,dr \quad \text{oder} \quad -d\left(k\frac{mm_1}{r}+c\right)$$

leistet, und dass folglich die gesamte Arbeit

$$-d\left(\sum k\frac{mm_1}{r}+C\right)$$

ist, wobei C eine willkürliche Integrationskonstante und das Zeichen $\sum$ eine Summe darstellt, welche auf alle Kombinationen von je zwei Gliedern ausgedehnt ist, die man mit den Punkten des Systems bilden kann.

Wenn wir auch hier den Begriff Energie einführen, können wir sagen, dass die Energie des Systemes

$$W=\sum k\frac{mm_1}{r}+C \tag{8}$$

ist.

Um die in diesem Ausdruck vorkommende Summe zu bilden, können wir damit beginnen, dass wir die den Kombinationen einer der Masse, z. B. m, mit jeder der anderen entsprechenden Posten summieren; wir bekommen so die partielle Summe

$$m\cdot k\sum\frac{m'}{r},$$

worin durch m' eine beliebige Masse, die Masse m ausgeschlossen, dargestellt ist. Aber $k\sum\frac{m'}{r}$ ist, abgesehen von einer willkürlichen Konstanten, das Potential des Systemes in dem Punkte, in welchem die Masse m gelegen ist; die partielle Summe ist also mV. Auf dieselbe Weise geben die Kombinationen einer anderen Masse, z. B. der Masse m_1, mit jeder der anderen eine partielle Summe m_1V_1, wobei V_1 den Wert des Potentials in dem Punkte, in welchem die Masse m_1 gelegen ist, darstellt. Analoge Resultate geben die partiellen Summen, die den anderen Massen m_2, m_3, $\cdots$ entsprechen. Durch Addition aller partiellen Summen erhält man

$$\sum mV,$$

worin die Summe $\sum$ sich auf alle Massen m, m_1, m_2, $\cdots$ erstreckt. Aber auf diese Weise ist jedes Massenpaar zweimal in Betracht gezogen worden; es ist z. B. die Kombination der beiden Massen m und m_1 sowohl ein Posten der partiellen Summe mV, wie auch der Summe $m_1 V_1$. Wir müssen somit das erhaltene Resultat durch 2 dividieren und finden auf diese Weise, dass die Energie des Systemes durch

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \tag{8'}$$

ausgedrückt ist.*)

22. Kraftflüsse. Sätze von Stokes und Green. Solenoidische Bedingung. — Betrachten wir das von einer im Punkte m gelegenen Masse m hervorgebrachte Kraftfeld (Fig. 16). In diesem Felde sind die Kraftlinien Gerade, die vom Punkte m ausstrahlen, und die Kraftröhren Kegel mit der Spitze in m. Einer von diesen Kegeln mit unendlich kleinem Raumwinkel schneidet auf der Kugel ss vom Radius 1 und Zentrum m ein Flächenelement vom Inhalte $d\omega$ aus; durch diesen Flächeninhalt $d\omega$ gewinnen wir ein Mass zur Bestimmung der Gröfse des *Raumwinkels des Kegels*. Wenn SS eine beliebige, von dem Kegel geschnittene Fläche ist, so bestimmt dieser auf derselben ein Flächenelement AB; der *scheinbare Flächeninhalt dieses Elementes AB, vom Punkte m aus gesehen*, wird durch den Raumwinkel $d\omega$ gemessen und dargestellt. So wie man nun ferner die Normale der Fläche AB im positiven und im negativen Sinne auffasst, wird auch der scheinbare Flächeninhalt entsprechend als positiv und als negativ behandelt; derselbe gilt als positiv, wenn die Verlängerung der Visierlinie mA jenseits der Fläche sich an der Seite der positiven Normalen Af_n befindet, im anderen Falle wird er als negativ angesehen. Scheinbarer Flächeninhalt

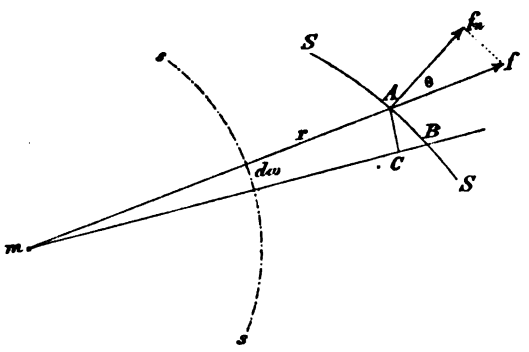

Fig. 16.

*) Wenn die Massen, welche das Feld erzeugen, anstatt in einzelnen Punkten konzentriert zu sein, stetig einen bestimmten Raum erfüllen, so treten in den Ausdrücken für das Potential und die Energie an die Stelle der einzelnen m die in den Volumenelementen vorhandenen Massen dm, und an die Stelle der Summe $\sum$ das über den ganzen betr. Raum ausgedehnte Integral.

einer begrenzten Fläche SS, vom Punkte m gesehen, heisst endlich die Summe der scheinbaren Flächen der Elemente AB, in welche die Fläche zerteilt werden kann.

Unter Berücksichtigung dieser Definitionen wollen wir nun den Kraftfluss durch das Flächenelement AB berechnen. Wenn dS der Flächeninhalt des Elementes ist, f_n die Kraftkomponente nach der Normalen der Fläche SS im Punkte A und $d\varphi$ der gesuchte Fluss, so hat man:

$$d\varphi = f_n dS.$$

Aber wenn f die Kraft ist, die in A angreift, und θ der Winkel, den sie mit der Normalen der Fläche SS bildet, so ist $f_n = f\cos\theta$; wenn ferner mit r die Entfernung mA bezeichnet wird, dann ist $f = k\frac{m}{r^2}$, und man hat:

$$d\varphi = km\,\frac{\cos\theta \cdot dS}{r^2}.$$

Nun ist $\cos\theta \cdot dS$ der Flächeninhalt der Projektion AC des Flächenelementes dS auf die Kugel vom Zentrum m und Radius r, und $\frac{\cos\theta \cdot dS}{r^2}$ der Flächeninhalt des entsprechenden Elementes auf der Kugel vom Radius 1; daher

$$\frac{\cos\theta \cdot dS}{r^2} = d\omega$$

und folglich

$$d\varphi = km\,d\omega. \tag{9}$$

Dieser Wert von $d\varphi$ hängt weder von der Entfernung r des Elementes AB, noch von der Richtung der Normalen auf dem Element ab; der Kraftfluss $d\varphi$ ist konstant der Grösse und Richtung nach über den ganzen betrachteten, unendlich dünnen Kegel hin; die Flüsse durch zwei beliebige Schnitte des Kegels sind einander gleich und gleichgerichtet.

Betrachten wir nun im Kraftfelde der Masse m eine geschlossene Fläche S, und stellen wir uns die Aufgabe, den gesamten Kraftfluss zu berechnen, welcher sie von innen nach aussen durchsetzt.

Wir nehmen vorerst an, dass die Masse m ausserhalb der geschlossenen Fläche S liegt (Fig. 17).

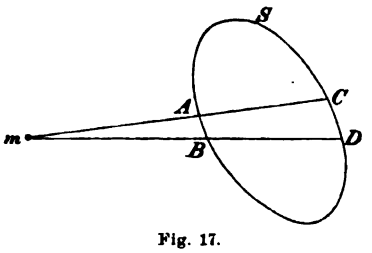

Fig. 17.

Ein Kegel mit der Spitze in m und mit unendlich kleinem Raumwinkel, gleich dem vorhin betrachteten, geht durch die geschlossene Fläche S zweimal oder allgemein $n$mal, wobei n eine beliebige, gerade Zahl darstellt. In AB tritt er in den von der Fläche eingeschlossenen Raum ein, in CD tritt er aus demselben wieder aus. Aus den kurz vorher dargelegten Gründen

sind die Kraftflüsse durch die Elemente AB und CD und allgemein durch alle von dem Kegel auf der Fläche S geschnittenen Elemente einander gleich. Diese Flüsse sind ferner alle in demselben Sinne, z. B. wenn die Masse m positiv ist, von m nach A gerichtet. Wenn wir aber den durch die Fläche von innen nach aussen gerichteten Fluss berechnen wollen, so müssen wir den Fluss durch das Element CD und allgemein durch alle Elemente, durch welche der Kegel aus dem Raume austritt, mit demselben Vorzeichen versehen, welches dem Flusse selbst zukommt, mit umgekehrtem Vorzeichen müssen wir dagegen den Fluss durch AB und allgemein durch die Elemente, durch welche der Kegel in den Raum eintritt, versehen. Da nun der Flächenelemente, durch welche der Kegel in den von der Fläche begrenzten Raum eintritt, ebenso viele sind, wie jener, durch welche der Kegel austritt, so heben sich die Flüsse in der algebraischen Summe zu zweien gegenseitig auf. Dies lässt sich für alle Kegel mit der Spitze in m, welche die Fläche S schneiden, behaupten, und folglich ist die algebraische Summe der Kraftflüsse, die aus allen Elementen der Fläche S austreten, gleich Null: *der gesamte Kraftfluss, der aus der geschlossenen Fläche S austritt, ist Null.*

Dies lässt sich noch verallgemeinern, wenn wir die Fläche S in einem Felde betrachten, das nicht von einer einfachen, in einem einzigen Punkte konzentrierten Masse m, sondern von einer beliebigen Zahl von beliebig verteilten Massen herrührt. Wenn alle diese Massen ausserhalb der Fläche liegen, so können wir für jede derselben das für die Masse m Gesagte wiederholen. Der gesamte Kraftfluss aber, der von dem System aller wirkenden Massen hervorgebracht wird, ist gleich der Summe der Flüsse, die von den einzelnen Massen herrühren; es ist also auch in diesem Falle der gesamte aus S austretende Fluss gleich Null. Wir haben also den Satz:

Wenn eine geschlossene, in einem Newton'schen Kraftfelde gelegene Fläche keine Masse einschliesst, so ist der Kraftfluss, der die Fläche durchsetzt, gleich Null.

Diesen Satz verdanken wir Stokes.

Indem wir die im Abschnitte [7] festgesetzte Definition adoptieren, können wir sagen, dass ein Newton'sches Kraftfeld in allen Teilen des Raumes, in welchen keine Massen von Agens sich befinden, *solenoidisch* ist. Also für alle Räume, in denen kein Agens vorhanden ist, bestehen die für die solenoidischen Felder bewiesenen Eigentümlichkeiten.

So sind, wenn zwischen zwei Schnitten AB und $A'B'$ einer Kraftröhre keine Massen von Agens sind, die Kraftflüsse durch die Schnitte

AB und $A'B'$, wie überhaupt durch alle Schnitte, die man sich zwischen diesen denken kann, einander gleich und gleichgerichtet; die Zahl der Einheitsröhren oder der Kraftlinien innerhalb der Röhre ist für den ganzen betrachteten Teil derselben konstant.

Behandeln wir nunmehr den Fall, wo innerhalb der geschlossenen Fläche S (Fig. 18) Masse von Agens existiert, und fangen wir mit der Voraussetzung an, dass innerhalb der Fläche S eine einzige, in einem Punkte m gelegene Masse m vorhanden sei. Wenn wir uns auch in diesem Falle einen Kegel mit der Spitze in m und dem unendlich kleinen Raumwinkel $d\omega$ denken, so schneidet dieser aus der Fläche S ein Element AB aus; der Kraftfluss $d\varphi$ durch ein solches Element hat, wie schon bewiesen, den Wert

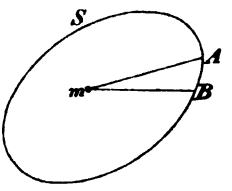

Fig. 18.

$$d\varphi = km\,d\omega.$$

Durch jedes Element von S gehen Flüsse hindurch, die wir auf dieselbe Weise berechnen können, und diese Flüsse sind alle nach aussen gerichtet, wenn die Masse m positiv, oder nach innen, wenn m negativ ist. Alle diese Flüsse haben daher dasselbe Vorzeichen, das Vorzeichen von m, und addieren sich. Somit ist der gesamte aus der geschlossenen Fläche S austretende Kraftfluss

$$km\int d\omega,$$

wobei das Integral über die ganze Fläche ausgedehnt werden muss. Nun ist die scheinbare Fläche von S in diesem Falle gleich der ganzen Kugelfläche mit dem Zentrum m und dem Radius 1, also gleich 4π; wenn wir daher mit φ den aus S austretenden Fluss bezeichnen, so haben wir

$$\varphi = 4\pi km. \tag{10}$$

Dieser Satz erstreckt sich auch auf den allgemeinen Fall, in welchem die Fläche S in ihrem Inneren eine beliebige Zahl von wirkenden Massen einschliesst. Es genügt zu bemerken, dass die Kraftflüsse, die von den einzelnen Massen herrühren, sich addieren. Wenn man mit $\sum m$ die algebraische Summe aller Massen bezeichnet, die sich innerhalb der Fläche S befinden, so hat man durch dieselbe von innen nach aussen einen gesamten Kraftfluss Φ, der durch die Formel

$$\Phi = 4\pi k \sum m \tag{10'}$$

gegeben ist.

Der durch diese Beziehung ausgedrückte Satz ist unter dem Namen Satz von Gauss oder Green bekannt.

Wir können die Sätze von Stokes und Gauss oder Green vereinigt wie folgt ausdrücken:

Der gesamte aus einer beliebigen, geschlossenen, in einem Newton'schen Kraftfelde gelegenen Fläche austretende Fluss ist gleich dem Produkte der Konstanten $4\pi k$ mal der algebraischen Summe der im Inneren der Fläche eingeschlossenen Massen und ist unabhängig von den Massen, die ausserhalb der Fläche selbst liegen.

Nachstehende Sätze sind Folgerungen dieses allgemeinen Theorems:

In einer Kraftröhre nimmt der Fluss, der an den Orten konstant ist, wo keine Massen von Agens existieren, um $4\pi km$ zu, wenn man von einem Schnitte der Röhre zu einem anderen übergeht, derart, dass man dadurch eine Region passiert, in welcher eine Masse m enthalten ist.

Sind zwei Flächen S und S' von derselben Begrenzung $ABCD$ (Fig. 19) umgeben, so haben die Kraftflüsse, die dieselben durchsetzen, denselben Wert und dieselbe Richtung, wenn in dem von S und S' begrenzten Raume $ASCS'$ keine Masse eingeschlossen ist. Wenn sich dagegen in diesem Raume eine Masse m befindet, so sind die beiden Kraftflüsse um $4\pi km$ von einander verschieden.

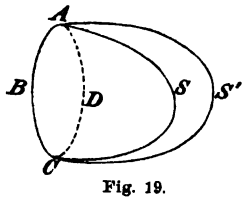

Fig. 19.

Wenn man in einem Newton'schen Kraftfelde durch geschlossene Flächen die Teile des Raumes einschliesst, welche Massen enthalten, so erfüllt der ganze Raum ausserhalb dieser Flächen die solenoidische Bedingung; die Teile des Raumes innerhalb der Flächen genügen ihr nicht, und der aus denselben austretende Fluss ist anstatt Null für jeden dieser Teile $4\pi km$, wenn m die eingeschlossene Masse darstellt; alle Kraftlinien haben Anfang und Ende in Punkten, in welchen eine Masse von Agens konzentriert ist oder im Unendlichen.

23. Dichte des Agens. Gleichungen von Poisson und Laplace. — Wenn v das Volumen eines Raumes ist, der eine Masse m enthält, pflegt man unter *mittlerer Dichte des Agens* in dem Raume v den Quotienten $\frac{m}{v}$ zu verstehen. Wenn das Volumen v verschwindend klein ist, so heisst dieses Verhältnis *Dichte des Agens.*

Wenn man mit ϱ die mittlere Dichte des Agens in einem Volumen v bezeichnet, so hat man in diesem Volumen eine Masse $m = \varrho v$; der Wert des von v austretenden Kraftflusses kann somit geschrieben werden:

$$\varphi = 4\pi k \varrho v. \tag{10''}$$

Diesem Satze kann man folgenden analytischen Ausdruck geben:

Man betrachte ein verschwindend kleines Prisma, dessen Seiten dx, dy und dz parallel zu drei Koordinatenachsen sind, und denke sich, dass in ihm die Dichte des Agens ϱ sei. Die in dem Prisma enthaltene Masse ist in diesem Falle $\varrho\, dx\, dy\, dz$ und folglich, nach dem bewiesenen Satze, der aus demselben austretende Fluss

$$4\pi k \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Für denselben Fluss hat man aber bereits [6] den Ausdruck gefunden

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

und folglich erhält man, indem man die beiden Werte gleich setzt:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi k \varrho. \quad (11)$$ *)

Nennt man V das Potential in einem Punkte des unendlich kleinen Prismas, so hat man aus der Formel (5)

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wenn man diese Werte in die vorige Gleichung einsetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k \varrho. \quad (12)$$ *)

Diese Beziehung verdanken wir Poisson.

Wenn die Verteilung solenoidisch ist, d. h. wenn innerhalb des betrachteten Elementes keine Masse von Agens ist, so ist $\varrho = 0$ und folglich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (13)$$

Dies ist die Gleichung von Laplace, welche die solenoidische Bedingung ausdrückt.

Aus den Beziehungen (1) und (11) geht hervor, wie bis auf einen konstanten Faktor $4\pi k$ die Divergenz des Vektors Kraft die Dichte des Agens darstellt; dadurch wird eben hervorgehoben, dass, wenn man nach der aus der alten Gewohnheit, die Erscheinungen zu betrachten, stammenden Sprechweise immer von Masse von Agens wie von etwas in dem Körper wirklich Existierendem spricht, der Begriff Masse ebenso wie der Begriff Divergenz in unsern Betrachtungen thatsächlich rein mathematisch ist und keine Hypothese über die Natur des Feldes und über die Ursachen, die es hervorbringen, bedingt. Wenn man sagt, dass in einem Punkte des Feldes eine Masse von Agens konzentriert ist, so will man nicht damit ausdrücken, dass in dem Punkte thatsächlich etwas existiert, sondern nur, dass in ihm die Divergenz des Vektors Kraft nicht Null ist.

*) Die ersten Glieder der Gleichungen (11) und (12) werden gewöhnlich bezw. mit $\Delta_1 V$ und $\Delta_2 V$ bezeichnet.

Zweites Kapitel.

Elektrizität.

§ 1.

Elektrischer Gleichgewichtszustand.

24. Elektrisierung durch Reibung. — Wenn man einen Siegellackstab mit einem Flanelltuch oder besser mit einem Stück Katzenfell reibt und ihn dann einem Tische nähert, auf welchem sich leichte Körperchen, wie Papierschnitzel, Federbart und dergl. befinden, so geraten diese in Bewegung, stellen sich auf eine Spitze oder springen vom Tische ab und berühren den Siegellackstab, welchem sie für einen Augenblick anhaften; dann reissen sie sich plötzlich los und fallen wieder ab, um aufs Neue sich zu erheben, sich anzuhängen, wieder abzufallen und so fort.

Dies beweist, dass in dem Raume zwischen Tisch und Siegellackstab Kräfte existieren, durch deren Wirkung die leichten Körper in Bewegung gesetzt werden; dieser Raum hat also eine neue Eigenschaft bekommen, die er zuvor nicht besass.

Man erzielt dieselbe Wirkung, wenn man statt des Siegellackstabes Stäbe aus Glas, Schwefel, Ebonit, Bernstein, Harz oder ähnlichen Substanzen reibt. Aus dem altgriechischen Namen für Bernstein, *ἤλεκτρον*, dessen Eigenschaft, leichte Körper anzuziehen, schon den Alten bekannt war, ist die Bezeichnung *Elektrizität* und *elektrische Erscheinungen* abgeleitet, welche den eben erwähnten und vielen anderen mit diesen zusammenhängenden Erscheinungen gegeben wird.

Der eben beschriebene Vorgang erweist sich als für die einleitende Betrachtung der elektrischen Erscheinungen nicht einfach genug, weil sich die verschiedenen Teile des geriebenen Stabes in verschiedenen Umständen befinden. Um grössere Einfachheit zu erlangen, wird es zweckmässig sein, den Versuch anders anzuordnen.

Auf einem Tische seien zwei metallische Platten zu einander parallel so angeordnet, dass die eine B (Fig. 20) in metallischer Verbindung mit der Erde direkt auf dem Tische liegt, die andere A, mit abgerundeter Kante versehen, von Glas- oder Ebonitstützen gehalten oder von Seidenschnüren getragen wird. Wenn man mit einem Fuchsschwanz eine Ebonitscheibe D klopft und sie dann auf A legt, so zeigen sich zwischen A und B die-

selben Erscheinungen, welche sich bei dem erstbeschriebenen Versuche zwischen Tisch und Stab mit den Papierstückchen beobachten liessen, aber in regelmässigerer Weise, weil alle Teile, ausser den näher am Rande befindlichen, gleichen Bedingungen unterliegen.

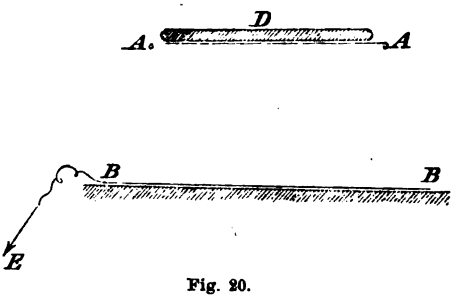

Fig. 20.

Der Raum zwischen den beiden Platten hat also die Eigenschaft, dass kleine, in ihn gebrachte Körper sich von Kräften angegriffen zeigen; er bildet ein Kraftfeld, welches wir *elektrisches Feld* nennen werden. In der That zeigen sich die Kräfte in dem Felde wirksam; man sollte daher die Ursache der Kräfte selbst eher in der Materie suchen, die einen solchen Raum erfüllt, als in den Körpern, zwischen welchen sich die Kräfte bemerkbar machen; dies würde uns aber auf ganz grundlose Hypothesen führen. Ohne irgend welche Hypothese aufzustellen, können wir die elektrischen Kräfte einem besonderen Agens [17] zuschreiben, das wir *Elektrizität* nennen; wir können also sagen, die Platten und die Körperchen, unter welchen die Kräfte wirken, sind *elektrisiert* oder mit *Elektrizität geladen.*

25. Leiter und Nichtleiter oder Konduktoren und Isolatoren. — Die im vorigen Absatze betrachtete, experimentelle Anordnung giebt uns ein Mittel an die Hand, um einen bemerkenswerten Unterschied in dem Verhalten der verschiedenen Körper wahrnehmen zu können. Wenn man die mit Elektrizität geladene metallische Platte *A* (Fig. 20) berührt, kann es je nach der Natur des zur Berührung gebrachten Körpers sein, dass die erwähnten elektrischen Erscheinungen sofort aufhören, oder dass dieselben unverändert fortbestehen.

Einige Körper sind also fähig, die Elektrizität zu entladen, fortzuleiten, und solche werden wir *Leiter* oder *Konduktoren* nennen (Metalle, Schwefelmetalle, Lösungen von Salzen und Säuren, tierische Gewebe etc.); andere Körper können die Elektrizität nicht entladen, und diese werden wir *Nichtleiter* oder *Isolatoren* nennen (Schwefel, Glas, Ebonit, Harz etc.). Eigentlich giebt es in der Natur keinen Körper, durch welchen sich die Elektrizität plötzlich entladet, und auch keinen, der absolut unfähig ist, die Elektrizität fortzuleiten; es giebt nämlich in der Natur weder den vollständigen Konduktor noch den vollständigen Isolator, doch zeigen sich unter beiden Klassen von Körpern so bemerkenswerte Verschiedenheiten, dass die getroffene Unterscheidung wohl berechtigt erscheint.

Damit ein Konduktor sich geladen erhalten könne, ist es notwendig, dass er lediglich mit Isolatoren in Berührung sei; man sagt dann, er ist *isoliert*. So war es z. B. bei dem oben erwähnten Versuche nötig die Scheibe A, um sie in geladenem Zustande zu erhalten, durch Glasstützen oder Seidenfäden zu isolieren.

Nicht nur die Isolatoren, sondern auch die Konduktoren elektrisieren sich durch Reibung. Um dies wahrnehmen zu können, muss der Konduktor mit einem isolierenden Griff versehen sein, damit verhindert wird, dass die entstandene Elektrizität sich durch den Körper des Experimentierenden entladet.

26. Zwei Arten von Elektrizität. — Man nehme zwei gleiche, metallische, isolierte Platten A und A' (Fig. 21). Auf A bringe man eine nichtleitende, vorher durch Reibung elektrisierte Scheibe D, berühre A

Fig. 21.

mit dem Finger und bringe dann, ohne A oder A' weiter zu berühren, die Scheibe D auf die Metallplatte A' und belasse sie darauf. Die Platten A und A' sind sodann beide elektrisch, aber in verschiedener Weise. In der That kann man mittels des elektrischen Pendels (kleine Holundermarkkugel, an einem Seidenfaden aufgehängt) konstatieren, dass beide Platten die Eigenschaft besitzen, kleine Körper anzuziehen und dieselben abzustossen, sobald sie mit ihnen in Berührung gekommen sind; man wird aber ferner beobachten, dass das von einer Platte abgestossene Pendelchen von der anderen angezogen wird. Die beiden Platten sind mit Elektrizität, aber mit Elektrizität von verschiedener Art geladen. Die beiden Arten heissen *positive* und *negative* Elektrizität; denn sie veranlassen Bewegungen, die einander entgegengesetzt sind.

Positive Elektrizität heisst diejenige, die an der Platte A bleibt, wenn man darauf eine elektrisierte Harzscheibe legt, erstere mit einem Finger berührt und nachher die Scheibe entfernt; früher wurde sie auch *Glaselektrizität* genannt, weil sie dieselbe Elektrizitätsart ist, die eine metallische Platte annimmt, auf welche man eine durch Reiben mit Seide elektrisierte Glasscheibe legt.

Negative Elektrizität heisst diejenige, die man in der Platte A' wahrnimmt, wenn man darauf die elektrisierte Harzscheibe legt; sie wurde früher auch *Harzelektrizität* genannt.

27. Elektrisierung durch Influenz. — In einem Körper zeigt sich Elektrizität auch einfach dadurch, dass man ihm einen anderen, elektrisierten Körper nähert. Wenn wir einem isolierten, mit Elektrizität (z. B. mit positiver) geladenen Konduktor *A* (Fig. 22) einen ebenfalls isolierten Konduktor *B* nähern, so ladet sich letzterer, und zwar mit gleichnamiger, positiver Elektrizität in den von *A* entfernteren Teilen und mit entgegengesetzter, negativer Elektrizität in den *A* näher gelegenen Teilen. Dies kann man leicht mittels der Holundermarkkugel erkennen.

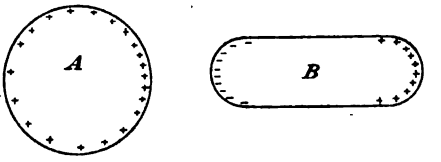

Fig. 22.

Wenn man *B* entfernt oder *A* entladet, so verschwinden in *B* die beiden Elektrizitätsarten.

Wenn *B* (Fig. 23) nicht mehr isoliert, sondern mit der Erde verbunden ist, tritt wieder die eben betrachtete Erscheinung auf, aber die gleichnamige Elektrizität, welche bei dem vorbeschriebenen Versuche an dem von *A* entfernten Ende des Konduktors *B* zum Vorschein gekommen war und dort verblieb, entladet sich zur Erde, und man behält somit nur die entgegengesetzte Ladung in dem *A* nahe gelegenen Ende von *B*. Auch diese Ladung verschwindet, wenn man *A* entfernt oder entladet. Wenn man jedoch, bevor man *A* entfernt oder entladet, *B* isoliert, d. h. die bisher bestehende Verbindung mit der Erde aufhebt, so verbleibt die entgegengesetzte Elektrizität in *B*; diese Ladung, die vorher hauptsächlich in dem *A* nahe gelegenen Teil von *B* konzentriert war, verteilt sich jetzt auf den ganzen Konduktor *B* nach einem nur von der Form desselben abhängigen Gesetz. Diesen Erscheinungen giebt man den Namen *Influenz* oder *elektrostatische Induktion*.

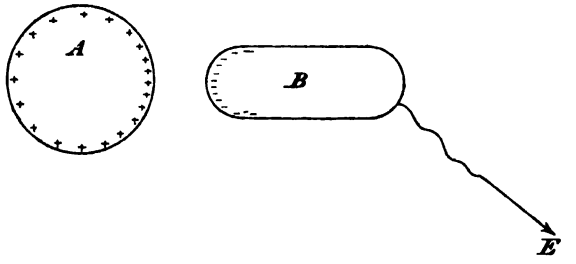

Fig. 23.

Bei fast allen elektrostatischen Versuchen hat man es mit Influenzerscheinungen zu thun. So können wir, wenn wir den im Abschnitte [24] erwähnten Versuch näher prüfen, beobachten, dass die negativ elektrische Harzscheibe *D* (Fig. 20) durch Influenz die Platte *A* elektrisiert, welche sich mit positiver Elektrizität im oberen und mit negativer Elektrizität im unteren Teile ladet. Die Elektrizität auf *D* und die nahe gelegene,

entgegengesetzte auf der oberen Seite von A heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf; folglich zeigt sich nur die negative Elektrizität auf der unteren Seite von A, welche ihrerseits durch Influenz auf die Platte B wirkt und dieselbe positiv ladet. Solche Ladungen sind es auch, die sich negativ auf A, positiv auf B zeigen und durch Influenz auf die Papierschnitzel wirken.

So wird auch in dem im Absatze [26] erwähnten Experiment die Platte A (Fig. 21) durch Induktion von der negativ elektrisierten Scheibe B geladen, und bleibt mit positiver Elektrizität geladen, wenn man sie mit dem Finger berührt und die Scheibe D entfernt. Auf der Platte A' dagegen, auf welcher man die Scheibe D lässt, zeigt sich nur auf der unteren Seite induzierte, negative Elektrizität.

28. Elektrische Anziehung und Abstossung. — Bei dem im Abschnitte [26] erwähnten Versuche sind die beiden Platten A und A' geladen, die eine mit positiver, die andere mit negativer Elektrizität; wir haben daher ein einfaches Mittel, nur positiv oder nur negativ geladene Körper zu erhalten, indem wir sie in Berührung mit der Scheibe A oder mit der Scheibe A' bringen, und können auf diese Weise die Wirkungen, die unter elektrisierten Körpern auftreten, studieren.

Wenn wir zwei isolierte, elektrische Pendelchen gleichnamig, entweder beide positiv oder beide negativ, laden, werden wir beobachten, dass sie sich abstossen; wir werden dagegen sehen, dass zwei mit entgegengesetzter Elektrizität geladene Pendelchen sich anziehen. Man kann also im allgemeinen sagen, dass zwei elektrisierte Körper sich abstossen, wenn sie mit gleichnamiger, sich anziehen, wenn sie mit ungleichnamiger Elektrizität geladen sind.

Wenn wir endlich einem isolierten und beliebig elektrisierten Pendelchen einen nicht isolierten Konduktor nähern, werden wir zwischen beiden Körpern eine Anziehung bemerken, welche daher kommt, dass in dem nicht isolierten Körper durch Influenz entgegengesetzte Elektrizität auftritt.

Durch Influenz elektrisiert sich ein Körper einfach dadurch, dass er in die Nähe eines elektrisierten Körpers gebracht wird. Immer, wenn man von elektrischen Wirkungen hervorgebrachte anziehende oder abstossende Kräfte konstatiert, sind beide Körper, unter welchen die Kräfte wirken, elektrisiert. Es ist daher natürlich, die Kräfte, die unter den Körpern wirken, den elektrischen Massen zuzuschreiben, welche in den Körpern enthalten sind. Man wird folglich allgemein sagen:

Gleichnamige elektrische Massen stossen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

29. Elektrisches Feld. — Aus den einfachen experimentellen Thatsachen, die wir erwähnt haben, können wir keine Schlussfolgerung über die Natur der elektrischen Erscheinungen ziehen; aber wir werden, ohne uns vorläufig um die Erforschung der Ursache zu kümmern, die solche Erscheinungen hervorbringt, die elektrischen Felder in allen ihren Erscheinungen vollkommen studieren können, indem wir auf dieselben alle die Gesetze anwenden, welche wir in allgemeiner Weise für die Kraftfelder aufgestellt haben, indem wir nämlich das Agens *Elektrizität* wie ein beliebiges Agens behandeln. Es wird hierbei nützlich sein, wenn wir nicht beliebig ausgedehnte Körper, sondern so kleine Körper betrachten, dass sie, wenn sie einander nicht zu nahe sind, in ihrem gegenseitigen Verhalten als materielle Punkte betrachtet werden können.

Wir werden indessen auf die elektrischen Felder die im Abschnitte [17] getroffenen Übereinkünfte ausdehnen. Wir werden sagen, dass zwei materielle Punkte gleiche *Elektrizitätsmengen* oder gleiche *elektrische Massen* enthalten, wenn sie, nach einander in einen und denselben Punkt des Feldes gebracht, von der Stärke und Richtung nach gleichen Kräften angegriffen werden, und dass die zwei Punkte ungleiche elektrische Massen enthalten, wenn auf sie dort ungleiche Kräfte wirken; bestimmter ausgedrückt, werden wir sagen, dass die in den Punkten konzentrierten Massen sich wie $m : n$ verhalten, wenn die beiden auf sie wirkenden Kräfte in derselben Beziehung zu einander stehen.

Nachdem wir so das Verhältnis zwischen zwei Massen definiert und eine bestimmte Masse als Einheit gewählt haben, werden wir die Werte der elektrischen Massen durch Zahlen ausdrücken können.

Indem wir im Felde eine Prüfmasse bewegen, werden wir in jedem Punkte die Stärke und Richtung des Feldes bestimmen können.

Die elektrische Kraft, die auf einen Punkt wirkt, kann die Richtung des Feldes oder die entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem der Punkt mit positiver oder mit negativer Elektrizität geladen ist; aber niemals wird der Punkt von anders gerichteten Kräften angegriffen sein.

30. Grundgesetze des elektrischen Gleichgewichtszustandes. — Die erwähnten Grunderscheinungen und die entwickelten Betrachtungen zeigen uns die Möglichkeit, Instrumente zu konstruieren, welche auch ganz kleine Elektrizitätsmengen nachzuweisen und zu messen gestatten; es genüge, ihres geschichtlichen Interesses wegen, das *Goldblattelektroskop* und die *Torsionswage von Coulomb* zu erwähnen.

Durch die Heranziehung dieser einfachen Apparate kann man einige Gesetze aufstellen, die sich auf den elektrischen Gleichgewichtszustand beziehen.

Man sagt, ein System von Konduktoren befindet sich im *elektrischen Gleichgewichte*, wenn die Verteilung der Elektrizität auf ihnen unverändert bleibt, wenn sich nämlich keine Erscheinungen zeigen, welche zu der Annahme eines Übergangs von elektrischen Massen von einem zu einem anderen Teil des Systemes zwingen. Dazu ist es nötig, dass die Konduktoren des Systems homogen sind, gleiche Temperatur besitzen, unbeweglich bleiben und sich nicht in der Nähe von Körpern befinden, welche veränderlichen magnetischen Zuständen unterworfen sind.

Die Experimentalgesetze, auf welchen die mathematische Theorie der Elektrizität beruht, sind wesentlich drei; wir werden aber deren vier erwähnen, von denen eines aus den anderen gefolgert werden kann. Die Thatsache, dass alle diese Gesetze experimentell nachgewiesen sind, gilt als Bestätigung und Kontrole ihrer Richtigkeit.

I. Gesetz. *Die elektrischen Kräfte sind Newton'sche Kräfte.* — Dieses Gesetz wurde zum ersten Male von Coulomb durch seine Drehwage konstatiert. Obwohl die Versuche mit der Wage keine grosse Genauigkeit geben können, kann doch über die Wahrheit dieses Gesetzes kein Zweifel aufkommen, weil es sich als Folgerung der anderen Gesetze ergiebt, welche die Erfahrung mit der grössten wünschenswerten Strenge beweist. Die Kraft, die zwischen zwei elektrischen Massen m und m' bei der Entfernung r wirkt, ist also nach dem von Coulomb gefundenen Gesetze ausgedrückt durch die Formel

$$f = k\frac{mm'}{r^2}. \tag{1}$$

In dieser Beziehung ist die Konstante k positiv, wenn wir übereinkommen, die Abstossung zwischen zwei gleichnamigen Massen als positiv zu betrachten.

II. Gesetz. *In dem elektrischen Gleichgewichtszustande giebt es keine Elektrizität im Innern der Konduktoren; die Elektrizität ist vollständig auf der Oberfläche verteilt.* — In der That kann man, wenn man einen elektrisierten Konduktor im Innern eines hohlen Konduktors in Berührung mit demselben bringt, durch ein Elektroskop konstatieren, dass der Körper keine Spur von Elektrizität dort besitzt, d. h. dass die gesamte Elektrizität auf der äusseren Oberfläche des hohlen Konduktors sich befindet. Diese Wahrnehmung giebt uns ein Mittel an die Hand, um einen Körper vollständig von jeder elektrischen Ladung zu befreien und auch die elektrischen Massen der in das Innere eines hohlen Konduktors gebrachten Körper algebraisch zu addieren, d. h. sie auf der äusseren Oberfläche des Konduktors sich übereinander lagern zu lassen.

III. Gesetz. *In dem elektrischen Gleichgewichtszustande ist die elektrische Kraft im Innern der vollständig geschlossenen, hohlen Konduktoren gleich Null.* — Es giebt kein elektrisches Feld innerhalb von hohlen Konduktoren, ausgenommen, dass ein solches durch geladene, isolierte, in ihrem Innern befindliche Körper hervorgebracht wird. Faraday liess, um dieses Gesetz zu bestätigen, ein von isolierenden Füssen getragenes Holzhäuschen bauen und mit dünnen metallischen Platten an der Aussenseite bekleiden. Mit den empfindlichsten Instrumenten gelang es ihm nie, das Vorhandensein auch nur der geringsten elektrischen Kraft innerhalb des Häuschens nachzuweisen, auch nicht, wenn man der äusseren Platte gewaltige, lange Funken verursachende Ladungen gab.

Man kann beweisen, dass, wenn dieses Gesetz erfüllt wird, die elektrischen Kräfte notwendiger Weise Newton'sche Kräfte sind, und man gewinnt dadurch eine Bestätigung des Coulomb'schen Gesetzes.

IV. Gesetz. *Wenn man irgendwie Elektrizität hervorbringt, werden immer und in gleicher Menge beide Elektrizitätsarten geliefert, so dass die algebraische Summe der hervorgebrachten Elektrizitätsmengen gleich Null ist. Die gesamte Elektrizitätsmenge, die in einem gegebenen System von Körpern existiert, ist konstant und kann weder zu- noch abnehmen, welcher Wirkung auch diese Körper unterliegen.* Dieses Gesetz trägt den Namen: *Prinzip der Erhaltung der Elektrizität.*

Dieses Prinzip wird leicht bewiesen, indem man mittels eines hohlen Konduktors die beiden erzeugten Elektrizitätsmengen summiert. So kann man, wenn man in das Faraday'sche Häuschen eine elektrostatische Maschine stellt und deren Konduktoren mit der metallischen Bekleidung des Häuschens in Verbindung bringt, grosse Elektrizitätsmengen mit der Maschine erzeugen, ohne dass sich ausserhalb etwas zeigt, weil sich die beiden erzeugten, ungleichnamigen Elektrizitätsmengen auf die äussere Oberfläche begeben und sich, da sie einander gleich sind, zu Null summieren.

31. Elektrisches Potential. — Von den erwähnten experimentellen Gesetzen ausgehend, kann man die elektrischen Felder im Gleichgewichte erschöpfend studieren.

Und zwar kann man die ganze für die Newton'schen Felder entwickelte Behandlung, dem ersten Gesetze zufolge, auf die elektrischen Felder anwenden. Für die elektrischen Massen sind also die Sätze von Gauss und Stokes giltig; in den Teilen des Raumes, wo keine elektrischen Massen sind, ist die Verteilung solenoidisch; in einem elektrischen Felde besitzen Niveauflächen, Kraftlinien und Kraftröhren alle bei der Behandlung der Newton'schen Felder besprochenen Eigenschaften. In

jedem Punkte des Feldes existiert ein *elektrisches Potential*, welches einen Wert besitzt, der durch den Ausdruck

$$V = k \sum \frac{m}{r} + C \tag{2}$$

vollständig bestimmt ist, worin m eine beliebige, in der Entfernung r vom betrachteten Punkte gelegene Masse darstellt, die Summe $\sum$, die im allgemeinen eine Summe von Integralen ist, auf alle Massen des Feldes ausgedehnt werden muss und endlich C eine Integrationskonstante ist, welche von der Wahl des festen Punktes im Felde, auf den die Potentiale bezogen werden, abhängt.

Zwischen Potential und elektrischer Kraft besteht die Grundbeziehung

$$f_s = -\frac{dV}{ds}. \tag{3}$$

Die Energie eines elektrischen Feldes ist durch

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \tag{4}$$

ausgedrückt, wobei m die Masse und V das Potential in einem beliebigen Punkte des Feldes bedeutet und die Summierung sich auf alle Massen des Feldes erstreckt.

Die elektrischen Felder besitzen jedoch besondere Eigenschaften, welche sie nicht mit allen Newton'schen Feldern gemeinsam haben, Eigenschaften, welche sich als Folgerung der anderen festgelegten Grundgesetze ergeben.

Im Innern eines Konduktors ist keine elektrische Masse vorhanden (II. Gesetz); man kann daher, ohne die Verteilung der Elektrizität zu verändern, in einem Konduktor den ganzen inneren Teil hinwegschaffen und ihm nur die Oberfläche, eine unendlich dünne Schale lassen, d. h. man kann den massiven Konduktor durch einen hohlen mit derselben Form und Oberfläche ersetzen. Nun ist im Innern eines hohlen Konduktors die Kraft gleich Null (III. Gesetz), also ist die Kraft auch im Innern eines beliebigen Konduktors gleich Null. Für alle Punkte im Innern eines Konduktors hat man also:

$$f_s = -\frac{dV}{ds} = 0,$$

woraus

$$V = \text{Konstant}.$$

Diese Beziehung gilt für innere, der Oberfläche des Konduktors beliebig nahe Punkte, gilt also auch für die Punkte der Oberfläche selbst.

In einem elektrischen Felde hat das Potential in allen Punkten eines Konduktors denselben Wert; es variiert nur von Konduktor zu Konduktor durch das dazwischenliegende, nicht leitende Medium.

Die Flächen, welche die Konduktoren begrenzen, sind Äquipotentialflächen und daher Niveauflächen; die Kraft ist in jedem ihrer Punkte senkrecht zu der Oberfläche des Konduktors.

Bei all unseren Versuchen befinden wir uns notwendigerweise in der Nähe eines Konduktors, der Erde, womit man nicht nur den Boden, sondern jeden mit ihm in besserer oder schlechterer Verbindung stehenden Konduktor (Wände und Decke des Zimmers, etc.) zu verstehen hat. Es wird der Einfachheit der Rechnung halber angemessen sein, dass wir in dem Ausdrucke der Potentiale die Integrationskonstante so wählen, dass das Potential der Erde Null wird. Das entspricht der Wahl des festen Punktes C [18] auf der Erde.

Nach dieser Vereinbarung ist *das Potential eines Konduktors die Arbeit, welche die elektrische Kraft leistet, während die Einheitsmasse von dem betreffenden zu einem anderen, mit der Erde in guter Verbindung stehenden Konduktor übergeht,* oder anders gesagt, *die Arbeit, die man verrichten muss, um die Einheitsmasse von der Erde auf den Konduktor zu bringen.*

Das Potential eines Konduktors ist positiv oder negativ, je nachdem es grösser oder kleiner als das Potential der Erde ist.

32. Elektrische Flächendichte. Beziehung zwischen elektrischer Dichte und elektrischer Kraft. — Die auf der Flächeneinheit vorhandene Elektrizitätsmenge heisst *mittlere elektrische Flächendichte;* die *elektrische Flächendichte* in einem beliebigen Punkte der Oberfläche eines Konduktors ist der Grenzwert, nach welchem der Quotient zwischen der Elektrizitätsmenge, die in einer kleinen, den Punkt einschliessenden Fläche enthalten ist und dem Inhalt dieser Fläche, wenn diese nach Null konvergiert, zustrebt.

Wenn dS der Inhalt eines unendlich kleinen Flächenelementes, dm die unendlich kleine elektrische Masse auf dem Element und σ die Dichte ist, so hat man

$$\sigma = \frac{dm}{dS}, \qquad dm = \sigma dS.$$

Die Änderungen der Dichte von Punkt zu Punkt auf der Oberfläche eines Konduktors ergeben das Gesetz, nach welchem die Elektrizität auf der Oberfläche selbst verteilt ist; wenn die Dichte einen konstanten Wert besitzt, ist die Verteilung gleichförmig.

Auf der Oberfläche AB (Fig. 24) eines Konduktors im elektrischen Gleichgewichte fassen wir ein Flächenelement vom Inhalt dS und von der Begrenzung ab ins Auge; σ sei die Dichte auf diesem Element und f der Wert der Kraft in einem Punkte M ausserhalb des Konduktors

unendlich nahe dem Element selbst. Wir nennen die Kraft positiv, wenn sie nach aussen gerichtet ist.

Stellen wir uns die Kraftröhre vor, welche ab als Basis hat; sie schneidet auf der durch M senkrecht zu f gelegten Ebene ein Element $a'b'$ aus, dessen Inhalt ebenfalls dS ist. Wählen wir ferner im Innern des Konduktors eine beliebige Fläche c, welche ab als Begrenzung hat. Die Fläche c, das Element $a'b'$ und die Seitenfläche des Röhrenstückes, das sich zwischen ab und $a'b'$ befindet, bilden eine geschlossene Fläche, welche in ihrem Innern, auf dem Element ab, die elektrische Masse σdS enthält. Nach dem Gauss'schen Satze ist der aus ihr austretende Fluss $4\pi k\sigma dS$. Die Kraft ist nun auf der Fläche c gleich Null und fällt auf der Fläche der Röhre mit der Tangente, auf dem Element $a'b'$ mit der Normalen zusammen; der austretende Fluss ist also einfach fdS. Man hat daher:

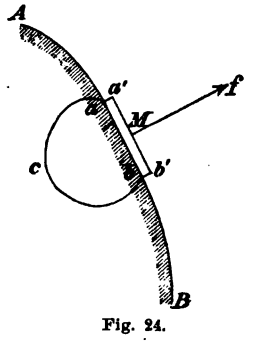

Fig. 24.

$$fdS = 4\pi k\sigma dS,$$

woraus

$$f = 4\pi k\sigma, \quad \sigma = \frac{f}{4\pi k}. \tag{5}$$

Zwischen der elektrischen Kraft in einem der Oberfläche eines Konduktors unendlich nahen Punkte und der Dichte auf der Fläche selbst besteht also eine einfache Proportionalitätsbeziehung.

Es ist wichtig, darauf zu achten, dass f und σ dasselbe Vorzeichen haben; dies beweist, dass die Kraft in den mit positiver Elektrizität geladenen Elementen nach aussen gerichtet ist, nach innen dagegen, wo die Ladung negativ ist.

Wir haben schon erwähnt, dass die Kraftlinien nur in dem isolierenden Raume vorhanden und zu der Oberfläche der Konduktoren senkrecht sind; jetzt können wir hinzufügen, dass dieselben von der Oberfläche der mit positiver Elektrizität geladenen Konduktoren ausgehen und auf der Oberfläche der negativ geladenen Konduktoren endigen.

33. Elektrostatischer Druck. — Auf der Oberfläche AB (Fig. 25) eines Konduktors betrachte man wieder ein Element ab vom Inhalt dS, auf welchem die Dichte den Wert σ besitzt; es sei ferner M ein Punkt, dessen Abstand von dem Element verschwindend klein gegen dessen Entfernung von der Begrenzung des Elementes ist. Die Kraft f im Punkte M kann man als Resultierende zweier Kräfte ansehen, nämlich der Kraft f_1, die von der auf dem Element ab verteilten Masse σdS

herrührt, und der Kraft f_2, die von den anderen Massen des Systemes (die vorher betrachtete Masse σdS ausgenommen) hervorgebracht wird.

Die Kraft f_1, die endlich sein kann, weil sie von einer zwar unendlich kleinen, aber dem Punkte unendlich nahe gelegenen Masse herrührt, ist unendlich wenig verschieden von der Kraft, die von einer auf der unbegrenzten Ebene, welcher das Element ab angehört, gleichförmig verteilten, überall die Dichte σ besitzenden elektrischen Masse auf den Punkt M ausgeübt wird; der Symmetrie wegen ist sie zur Ebene senkrecht gerichtet. Die Kraft f ist auch senkrecht auf dem Element ab, folglich hat auch die Kraft f_2 dieselbe Richtung, so dass man einfach setzen kann:

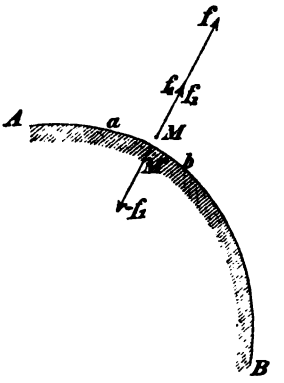

Fig. 25.

$$f = f_1 + f_2.$$

In dem im Innern des Konduktors und zu M in Bezug auf die Ebene ab symmetrisch gelegenen Punkte M' ist die Feldstärke gleich Null, die Kraft, die von der Masse σdS auf dem Element ab herrührt, gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Kraft f_1 in M; ferner ist in demselben Punkte, abgesehen von einer unendlich kleinen Grösse, die Kraft, die den übrigen Massen ihr Dasein verdankt, dieselbe wie f_2. Man hat daher:

$$f_2 - f_1 = 0, \quad f_1 = f_2 = \frac{1}{2} f;$$

da nun aber $f = 4\pi k\sigma$ ist, so folgt:

$$f_1 = f_2 = 2\pi k\sigma.$$

Nun wirken auf jeden Punkt des Elementes ab alle anderen Massen des Systemes mit Kräften, welche unendlich wenig von der Kraft f_2 differieren, mit welcher dieselben Massen auf den unendlich nahen Punkt M wirken. Auf dem Element ab ist aber die Masse σdS verteilt, deswegen wird sie durch die Wirkung der anderen Massen des Feldes von einer Kraft

$$f_2 \sigma dS = 2\pi k\sigma^2 dS$$

angegriffen.

Diese Kraft ist, wie die Kraft f_2, zur Oberfläche des Konduktors senkrecht und ausserdem immer positiv, d. h. nach aussen gerichtet, welches das Vorzeichen von σ auch sein möge.

Auf der Oberfläche eines elektrisierten Konduktors wirken also Kräfte, die immer nach aussen gerichtet sind. Die Kraft auf die Flächeneinheit hat den Wert

(6) $$p = 2\pi k\sigma^2$$

und heisst *elektrostatischer Druck.*

Das Vorhandensein des elektrostatischen Druckes kann auf recht anschauliche Weise dadurch bewiesen werden, dass man einer Seifenblase einen elektrisierten Körper nähert; durch Induktion elektrisiert sich die Seifenblase, durch den elektrostatischen Druck schwillt sie und platzt.

Die Kräfte pdS, die jedes Element dS der Oberfläche eines Konduktors angreifen, können als Kräfte angesehen werden, welche ihre Entstehung einer auf die Konduktoren von dem zwischen ihnen gelegenen, isolierenden Medium ausgeübten Zugspannung verdanken. Wir können uns die Erscheinung dadurch vorstellen, dass wir uns in dem Medium viele elastische Schnüre denken, die an den Elementen dS der Oberfläche der Konduktoren befestigt und so gespannt sind, dass sie auf das Element den Zug pdS ausüben. Das System der anziehenden und abstossenden Kräfte, welchen jeder Konduktor durch die Wirkung der elektrischen Massen des Feldes ausgesetzt ist, ist gleichwertig dem System der von dem isolierenden Medium auf die Konduktoren ausgeübten Spannungen pdS.

Es ist uns so nahe gelegt, an die Möglichkeit zu denken, dass die Wirkungen, die wir den zwischen den Konduktoren fernwirkenden Newton'schen Kräften zuschrieben, ihr Dasein Spannungen verdanken, welche in dem Medium existieren, in dem die Konduktoren sich befinden; Spannungen, welche von besonderen Deformationen, von einem Zwangszustande des elektrischen Gleichgewichts in dem Medium selbst, erzeugt werden. Unter dem mechanischen und mathematischen Gesichtspunkte ist die Betrachtung der Spannungen in dem isolierenden Medium der Betrachtung der Newton'schen Fernwirkungen unter den Konduktoren gleichwertig.

Um festzusetzen, welche von den beiden Deutungen des elektrischen Feldes richtiger ist und den experimentellen Thatsachen mehr entspricht, wird es zunächst nötig sein, dass die Erfahrung uns ein Mittel zur Beantwortung der Frage giebt, wo eigentlich der Sitz der elementaren Erscheinungen ist, welchen das elektrische Feld seine Entstehung verdankt. Wenn wir einerseits annehmen, dass die Ursache der elektrischen Kraft in den Punkten liegt, welche die elektrischen Massen enthalten, auf die die Kraft wirkt, so wird man dahin geführt, an eine gewisse elektrische Materie oder an einen Zustand der in diesen Punkten existierenden schweren Masse, d. h. der Schwerkraft unterworfenen Materie zu denken; man wird also dahin geführt, dem Agens Elektrizität eine wahre, materielle Existenz zuzuschreiben; in diesem Falle liegt die Newton'sche Behandlung näher. Wenn man dagegen annimmt, dass die unmittelbare Ursache der elektrischen Kraft in denselben Punkten liegt, wo die Kraftwirkung beobachtet wird, nämlich in dem die Konduktoren trennenden isolierenden

Medium, erscheint es nicht mehr natürlich, Fernwirkungen zu betrachten, sondern man wird dazu geführt, die Kraft als eine Äusserung eines Zustandes des isolierenden Mediums anzusehen, z. B. einer besonderen Deformation, welche sich kontinuierlich von Punkt zu Punkt mit unendlich kleinen Schritten fortpflanzt und sich durch die auf die Konduktoren ausgeübten Zugspannungen pdS bemerkbar macht.

34. Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche der Konduktoren. Spitzenwirkung. — Man betrachte das von irgend einem mit Elektrizität geladenen Konduktor M erzeugte Feld (Fig. 26). In einem Punkte, der so weit vom Konduktor entfernt ist, dass die Dimensionen des Konduktors gegen die Grösse des Abstandes vernachlässigt werden können, bleibt das erzeugte Feld das gleiche, ob man die elektrische Masse auf der Oberfläche des Körpers verteilt oder ob man sie ganz in einem Punkte O (ungefähr im Zentrum des Körpers) konzentriert annimmt. Über diese Entfernung hinaus sind also die Kraftlinien Gerade, die durch O hindurchgehen, die Niveauflächen Kugeln mit demselben Zentrum O, in gleichem Abstande von einander; die Kraft hat konstanten Wert in allen Punkten derselben Kugelfläche. In geringerer Entfernung vom Konduktor haben die Dimensionen desselben Einfluss auf die Gestaltung des Feldes; von der Form des Körpers hängt die Form der Niveauflächen ab und zwar um so mehr, je kleiner die Entfernung von dem Körper ist; die Oberfläche des Körpers ist selbst eine Niveaufläche. Die Kraftlinien, die, wie wir wissen, senkrecht zu allen diesen Flächen sind, hängen natürlich auch von der Form und von der Krümmung der Oberfläche des Körpers ab.

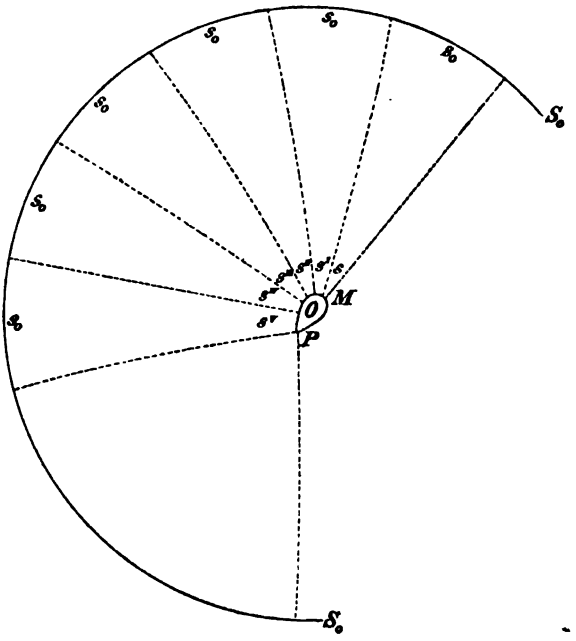

Fig. 26.

Es sei S_0S_0 eine der kugelförmigen Niveauflächen, in deren sämtlichen Punkten die Kraft konstanten Wert besitzt. Denken wir uns die Fläche S_0S_0 in viele Flächenelemente vom Inhalt s_0 zerteilt; durch jedes derselben hat der Kraftfluss denselben Wert f_0s_0.

Nehmen wir diese Flächenelemente als Grundflächen von ebenso vielen Kraftröhren, welche auf der Oberfläche von M Elemente bestimmen, deren Inhalte $s, s', s'', \cdots$ um so kleiner sind, je mehr die Röhren konvergieren, d. h. je grösser die Krümmung der Fläche dieser Elemente ist. Der Kraftfluss durch diese Elemente hat die Werte $fs, f's', f''s'', \cdots$, wenn wir durch $f, f', f'', \cdots$ die entsprechenden Werte der Kraft bezeichnen. Der solenoidischen Bedingung wegen hat man die Beziehungen

$$f_0s_0 = fs, \quad f_0s_0 = f's', \quad \text{etc.},$$

woraus folgt:

$$fs = f's', \quad \frac{f}{f'} = \frac{s'}{s}.$$

Die elektrische Kraft ist also um so grösser, je kleiner der Inhalt s des Elementes, d. h. je kleiner dessen Krümmungsradius ist, und da die elektrische Dichte proportional zu der Kraft ist, so ist auch die Dichte umgekehrt proportional dem Krümmungsradius. Man hat so das Gesetz, nach welchem die Verteilung der Ladung auf der Oberfläche der Konduktoren von der Form der Oberfläche selbst abhängt.

In jedem besonderen Falle wird man dadurch, dass man unendlich dünne Kraftröhren betrachtet, genaue Rechnungen aufstellen und die Werte der Dichte in allen Punkten eines Konduktors im Gleichgewichtszustande ermitteln können; uns genügt es, das der Verteilung zu Grunde liegende Gesetz in allgemeiner Weise erläutert zu haben.

Ein spezieller, bemerkenswerter Fall verdient besondere Beachtung. Es habe der Konduktor M in einem Punkte P eine Spitze; in diesem Punkte ist der Krümmungsradius Null, also ist die Kraft unendlich gross, ebenso die Dichte und der elektrostatische Druck.

In der Praxis kann man Spitzen herstellen, deren Krümmungsradien, wenn auch nicht Null, so doch sehr klein sind, wodurch also der Druck an diesen Stellen sehr gross wird. Dies erklärt uns die sogenannte *Spitzenwirkung*, d. h. das Bestreben der Spitzen die Elektrizität entweichen zu lassen. Es ist bekannt, dass diese Eigenschaft bei vielen elektrischen Apparaten und Instrumenten, wie z. B. bei den elektrostatischen Maschinen, nützlich verwertet wird.

35. Korrespondierende Flächen. — In dem elektrischen Felde denken wir uns nicht mehr einen einzigen, in sehr grosser Entfernung von allen anderen gelegenen Konduktor, sondern zwei einander nahe liegende

Konduktoren A und B (Fig. 27). Fassen wir nun eine beliebige, die beiden Konduktoren verbindende Kraftröhre ins Auge. Die Flächen mit der Begrenzung aa und bb, welche dieselbe auf den Konduktoren ausschneidet, heissen *korrespondierende Flächen.* Wir wissen [32], dass die Fläche aa, von welcher die Röhre ausgeht, positiv, und die Fläche bb, auf welcher die Röhre endigt, negativ elektrisiert ist; jetzt behaupten wir, dass die auf den korrespondierenden Flächen verteilten entgegengesetzten Massen m_a und m_b einander gleich sind. Stellen wir uns in der That im Innern der beiden Konduktoren je eine beliebige Fläche α und β vor, welche dieselbe Begrenzung hat, wie die betreffende korrespondierende Fläche; wir bilden auf diese Weise, durch jene Flächen und durch die Seitenfläche der Röhre, eine geschlossene Fläche, welche in ihrem Innern die beiden Massen m_a und m_b einschliesst. Der aus dieser Fläche austretende Fluss ist Null, weil die Kraft in den Punkten der inneren Flächen α und β Null ist und in den Punkten der Seitenfläche der Röhre mit der Tangente zusammenfällt; nun ist aber nach dem Gauss'schen Satz der austretende Fluss durch $4\pi k\,(m_a + m_b)$ gegeben; man hat daher:

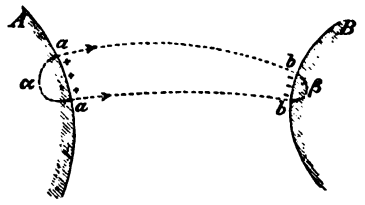

Fig. 27.

$$4\pi k\,(m_a + m_b) = 0$$

oder

$$m_a + m_b = 0, \quad m_a = -m_b.$$

Zwei korrespondierende Flächen enthalten gleiche und mit umgekehrten Vorzeichen versehene elektrische Massen.

Das Theorem der korrespondierenden Flächen dient dazu, die Auffassung noch besser zu erläutern, dass die elektrischen Erscheinungen ihr Dasein Deformationen des Mediums verdanken. Wir können nun die Darstellung eines elektrischen Feldes durch elastische Schnüre ergänzen. Jede dieser Schnüre, die wir senkrecht auf der Oberfläche eines Konduktors befestigt dachten, können wir uns jetzt entsprechend einer zwei korrespondierende Elemente verbindenden Kraftröhre verlaufend denken. Es ist einleuchtend, dass an den Endpunkten einer und derselben Schnur gleiche elektrische Massen konzentriert sind, denn die fernwirkenden elektrischen Massen gleichen ihrer Wirkung nach den Spannungen der Schnüre.

36. Darstellung von besonderen elektrischen Feldern. Elektrostatische Influenz. — Die erwähnten experimentellen Thatsachen und die bewiesenen Sätze gestatten uns, bekannte Eigenschaften der elektrischen Felder abzu-

leiten. So ergeben sich z. B. die Erscheinungen der elektrostatischen Induktion selbst als notwendige Folgerung der allgemeinen Betrachtungen, die wir gemacht haben.

Denken wir uns ein gleichförmiges Feld, d. h. ein Feld, in welchem die Kraftlinien gleichförmig verteilte, parallele Gerade sind; die gleichen Potentialdifferenzen entsprechenden Niveauflächen sind parallele Ebenen in gleichem Abstande von einander.

In ein solches Feld bringe man einen isolierten Konduktor AB (Fig. 28). In einer gewissen Entfernung vom Konduktor ist die Wirkung,

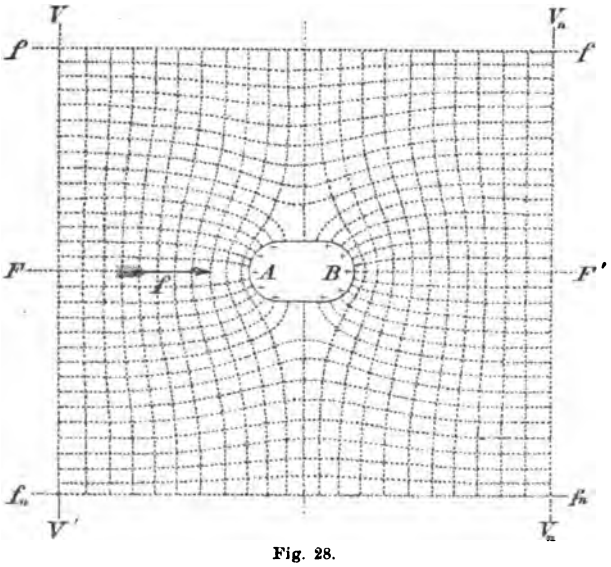

Fig. 28.

die durch die Einführung desselben hervorgebracht wird, nicht mehr nachweisbar; über diese Entfernung hinaus kann man also das Feld als unverändert betrachten. V und V' seien die ersten Niveauflächen, die man als Ebenen, f und f_n die ersten Kraftlinien, die man als Gerade ansehen kann. In geringerer Entfernung ist das Feld notwendigerweise verändert, und zwar ist im Innern des Konduktors die Kraft Null, und die Oberfläche AB des Konduktors selbst ist eine Niveaufläche. In den nahe beim Konduktor liegenden Punkten weichen die Niveauflächen von AB wenig ab: bei wachsender Entfernung deformieren sie sich nach und nach, bis sie wieder Ebenen werden.

Den Teilen AB des Konduktors entsprechend hat man zwei Regionen, wo die Niveauflächen dichter nebeneinander sind. Es ist so, als wenn die Niveauflächen sich zurückgezogen und deformiert hätten, um dem Konduktor Platz zu machen.

Auch die Kraftlinien deformieren sich derart, dass sie senkrecht zu den Niveauflächen bleiben. Bei der in der Figur gewählten Richtung des Feldes biegen sich die Kraftlinien von der Region jenseits der Ebene V, wo sie noch parallele Gerade sind, konvergierend nach dem Ende A; während sie nach dem Austritt aus dem Ende B divergieren, bis sie jenseits der Ebene V_n wieder als Gerade betrachtet werden können.

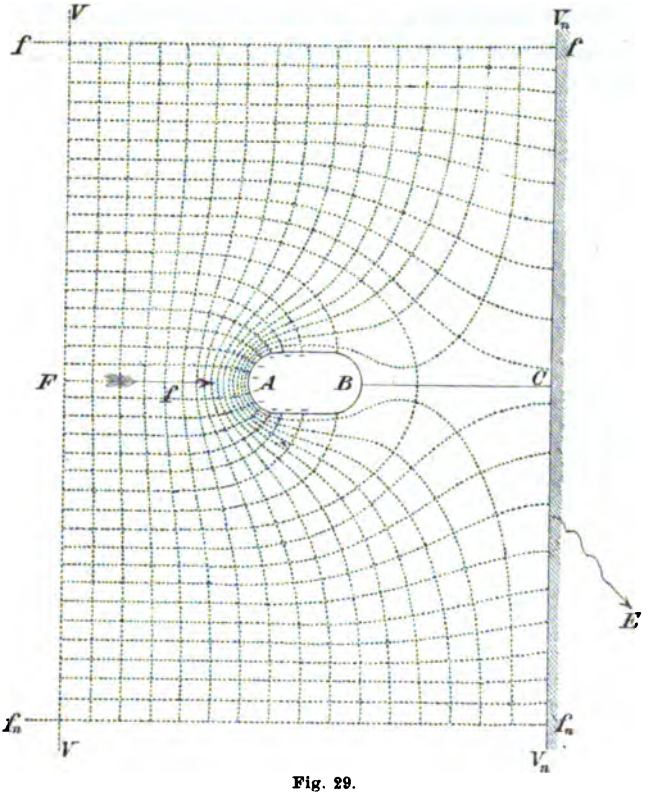

Fig. 29.

Wenn alles symmetrisch ist, so sind die Geraden FA und BF' noch Kraftlinien. Auf dem Teil A des Konduktors, wo die Kraftlinien ankommen, hat man eine Verteilung von negativer Elektrizität, auf dem Teil B, von wo die Kraftlinien ausgehen, eine Verteilung von positiver Elektrizität.

Betrachten wir noch ein Beispiel.

In einem homogenen Felde sei V_n (Fig. 29) die Niveauebene vom Potential Null, gebildet z. B. von der Oberfläche eines Konduktors in Verbindung mit der Erde. In dieses Feld versetze man einen durch einen metallischen Faden BC mit der Fläche V_n und folglich mit der Erde verbundenen Konduktor AB. Über eine gewisse Entfernung hinaus

bleiben die Niveauflächen Ebenen, die Kraftlinien Gerade; V sei die erste dieser Ebenen, f und f_n seien die ersten geradlinigen Kraftlinien. In der Nähe des Konduktors ist das Feld notwendigerweise verändert. Die Niveaufläche vom Potential Null ist von der Ebene V_n, von der Oberfläche des Fadens BC und von derjenigen des Konduktors AB gebildet. Die folgenden Niveauflächen weichen nach und nach immer mehr von der Form der Fläche mit dem Potential Null ab, bis sie wieder die Form einer Ebene annehmen. In der Nähe des Teiles A des Konduktors sind die Niveauflächen dichter, als wären dieselben nach links von AB gedrängt worden.

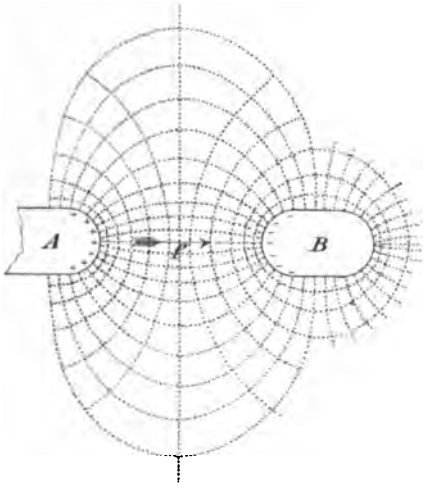

Fig. 30.

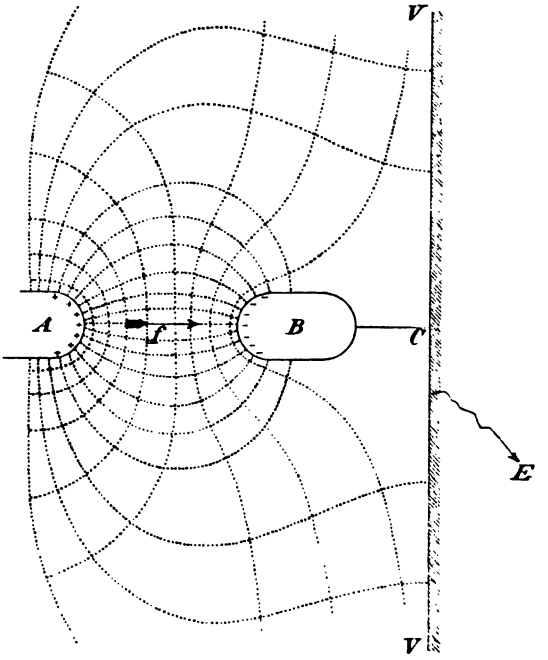

Fig. 31.

Bei der gewählten Richtung des Feldes sind die Kraftlinien, die sich jenseits der Ebene V befinden, Gerade; sie konvergieren und häufen sich speziell auf dem Teile A an. Angenommen, es sei alles symmetrisch, bleibt die Gerade FA eine Kraftlinie. Auf dem Konduktor AB endigen zwar Kraftlinien, aber keine geht von demselben aus; er ist daher lediglich mit negativer Elektrizität geladen, welche hauptsächlich auf dem Teile A verteilt ist.

In diesen beiden Beispielen haben wir die Influenz eines gleichförmigen Feldes auf einen Konduktor erläutert; man kann auf dieselbe

Weise die elektrostatische Influenz in dem allgemeinen Falle studieren, der sich uns häufiger bietet, nämlich die Influenz eines geladenen Konduktors A auf einen isolierten oder mit der Erde verbundenen Konduktor B.

Man erkennt aus denselben Betrachtungen, dass das Feld in den beiden Fällen die schematisch in Fig. 30 bezw. Fig. 31 dargestellte Anordnung hat, und kann dieselben Schlussfolgerungen in Bezug auf die elektrischen Ladungen in beiden Fällen ableiten.

Anstatt uns auf allgemeine Betrachtungen zu beschränken, könnten wir diese Fälle Berechnungen unterziehen und die quantativen Beziehungen der Erscheinungen ermitteln.

37. Elektrisierter Körper in einem hohlen Konduktor. — Es möge ein beispielsweise mit positiver Elektrizität geladener Konduktor innerhalb eines ihn vollständig einschliessenden Konduktors B gelegen sein. Alle im Raume zwischen A und B vorhandenen Kraftröhren gehen von der Oberfläche von A aus und endigen notwendigerweise auf der inneren Fläche von B. Daher entsprechen allen auf A vorhandenen Massen gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Massen im Innern von B, und folglich sind die sämtlichen auf den beiden Oberflächen verteilten Massen entgegengesetzt gleich. Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität ist die gesamte Elektrizitätsmenge, die A auf B hervorbringt, gleich Null; man muss also auf der äusseren Fläche von B eine positive Elektrizitätsmenge gleicher Grösse wie jene von A haben. Wenn A in Berührung mit der inneren Fläche von B kommt, heben sich die beiden gleichen Massen, die positive von A und die negative von B auf, so dass im ganzen die Ladung von A auf die äussere Fläche von B übergegangen ist. Dies liefert, wie schon erwähnt, ein Mittel [30], einen Konduktor vollständig zu entladen und mehrere Elektrizitätsmengen zu summieren.

Wenn der Konduktor B nicht isoliert ist, so bleibt sein Potential beharrlich Null, und die auf seiner äusseren Fläche erzeugte Elektrizität entladet sich zur Erde.

Irgend ein elektrischer Vorgang, der sich im Innern abspielt, bringt ausserhalb keine Wirkung hervor; andererseits wissen wir, dass ein beliebiger äusserer Vorgang keinen Einfluss auf das Innere des Konduktors hat; folglich trennt ein hohler, nicht isolierter und vollständig geschlossener Konduktor den Raum in zwei Teile, welche unter sich elektrisch vollständig unabhängig sind. Diese Eigenschaft findet wichtige Anwendung bei den elektrostatischen Messinstrumenten, welche vollständig von jedem äusseren Einfluss dadurch geschützt werden können, dass man sie in metallische, in Verbindung mit der Erde stehende Gehäuse einschliesst, welche so wirkliche *elektrische Schirme* bilden.

38. Änderung der Verteilung der Massen, ohne Veränderung der Verteilung der Kraft in gewissen Regionen. — In einem elektrischen Felde betrachten wir eine Niveaufläche S, welche das Feld in zwei Teile, in einen inneren und in einen äusseren, zerlegt. Wenn wir die Fläche S durch ein dünnes metallisches Plättchen verkörpern, entstehen auf den beiden Seiten durch Influenz zwei gleiche und entgegengesetzte elektrische Verteilungen; die gesamte auf der äusseren Seite induzierte elektrische Ladung ist gleich der algebraischen Summe M der im Innern der Fläche enthaltenen Massen m; auf der inneren Seite ist die gesamte Ladung $-M$. Weil S eine Niveaufläche ist, wird dadurch das Gleichgewicht des Systems keineswegs gestört und der Wert der Kraft nicht geändert; und zwar bringen die entgegengesetzt gleichen induzierten Massen, welche auf der Fläche S, ohne die Verteilung der anderen Massen zu ändern, im Gleichgewicht bleiben, in jedem Punkte gleiche und der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte hervor.

Nun erzeugen die innerhalb der leitenden Fläche gelegenen Massen kein Feld ausserhalb und die ausserhalb gelegenen Massen kein Feld innerhalb derselben; wir können also sagen, dass das vorher im äusseren Raume von den innerhalb der Fläche gelegenen Massen erzeugte Feld gleich dem Felde ist, welches jetzt von der auf derselben Fläche verteilten Masse M erzeugt wird, und ferner, dass das vorher innerhalb der Fläche S von den äusseren Massen erzeugte Feld gleich dem Felde ist, welches jetzt von der Masse $-M$ auf S erzeugt wird.

Wenn man nur den inneren oder den äusseren Teil eines durch eine Niveaufläche in zwei Teile zerlegten elektrischen Feldes betrachtet, kann man immer die innerhalb oder ausserhalb der Fläche selbst gelegenen Massen durch die elektrischen Massen ersetzen, welche auf der inneren oder auf der äusseren Seite derselben Fläche durch Influenz entstehen würden, wenn dieselbe metallisch verkörpert wäre.

Hat man im Felde nur den zwischen zwei Niveauflächen, der inneren S und der äusseren S', eingeschlossenen Raum zu betrachten, so kann man, ohne die Verteilung der Kraft in diesem Raume zu ändern, die innerhalb von S und ausserhalb von S' gelegenen Massen durch die Ladungen ersetzt denken, welche durch Induktion auf der äusseren Seite von S bezw. auf der inneren von S' erzeugt werden würden, wenn die beiden Flächen metallisch verkörpert wären.

39. Geradlinige und zylindrische Verteilung. — Betrachten wir das Feld, welches von einer längs einer unendlich langen Geraden A gleichförmig verteilten elektrischen Masse erzeugt wird; bezeichnen wir mit A (Fig. 32) auch die Spur der Geraden auf der Zeichnungsebene, mit λ die

elektrische Liniendichte, d. h. in unserem Falle die auf der Längeneinheit verteilte Elektrizitätsmenge. Aus einfachen Symmetriegründen sind die Kraftlinien Gerade, welche die Gerade A unter rechtem Winkel schneiden und von derselben divergierend ausgehen, wenn wir annehmen, dass die betreffende elektrische Masse positiv ist. Die Niveauflächen sind Zylinderflächen, die als Achse die Gerade A haben; die Kraft besitzt auf jeder dieser Flächen konstanten Wert.

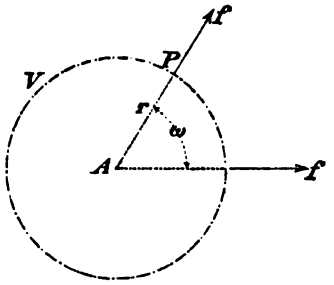

Fig. 32.

Der Fluss, der aus der geschlossenen Fläche austritt, welche von der Niveaufläche mit dem Radius r und von zwei zu der Achse senkrechten, im Abstande l von einander gelegenen Ebenen gebildet wird, ist $2\pi rlf$; andererseits giebt der Gauss'sche Satz, weil diese geschlossene Fläche in ihrem Innern die Masse $l\lambda$ einschliesst, für den austretenden Fluss den Ausdruck $4\pi kl\lambda$; man hat daher

$$2\pi rlf = 4\pi kl\lambda,$$

woraus folgt:

$$f = \frac{2k\lambda}{r}.$$

Die von zwei in der Geraden A sich schneidenden Ebenen gebildeten, keilförmigen Raumteile (Diëder) sind Kraftröhren. Wenn ω der Flächenwinkel der beiden Ebenen ist, so wird der Fluss durch das Diëder durch die Beziehung gegeben

$$\varphi : 4\pi kl\lambda = \omega : 2\pi,$$

woraus folgt:

$$\varphi = 2\omega kl\lambda.$$

Wir können auch das Potential in einem beliebigen Punkte des Feldes leicht berechnen. Wenn man sich an die Formel (3) und an den eben gefundenen Ausdruck für die Kraft erinnert, so hat man:

$$-\frac{dV}{dr} = f = \frac{2k\lambda}{r},$$

woraus folgt:

$$dV = -2k\lambda\frac{dr}{r}$$

und durch Integration

$$V = \text{Konst.} - 2k\lambda \log r.$$

Die Äquipotentialflächen sind durch die Gleichung

$$r = \text{Konst.}$$

bestimmt, sind also zylindrische Flächen mit der Achse A, wie wir schon erwähnt haben.

Man betrachte jetzt das Feld, welches von zwei entgegengesetzt gleichen, auf zwei parallelen Geraden A_1 und A_2 (Fig. 33) gleichförmig mit der Dichte λ bezw. $-\lambda$ verteilten elektrischen Massen herrührt.

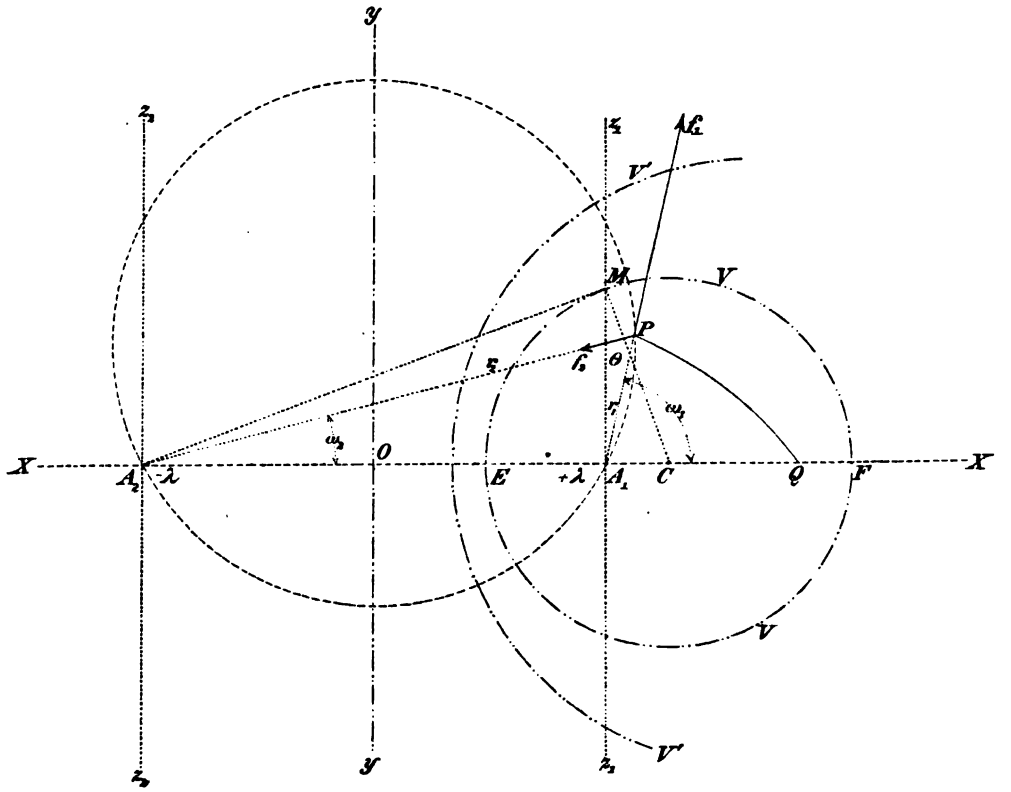

Fig. 33.

In einem beliebigen Punkte P des Feldes in der Entfernung r_1 von A_1 und r_2 von A_2 bringt die auf der Geraden AA_1 verteilte elektrische Masse eine nach A_1P gerichtete Kraft $f_1 = \frac{2k\lambda}{r_1}$ hervor; die auf der Geraden A_2 verteilte elektrische Masse erzeugt im Punkte P eine nach PA_2 gerichtete Kraft $f_2 = -\frac{2k\lambda}{r_2}$. Die Stärke des Feldes in dem Punkte P ist die Resultante der beiden Kräfte f_1 und f_2; sie ist in der durch P senkrecht zu A_1 und A_2 gelegten Ebene enthalten.

Alle Geraden, welche, wie die Gerade XX, senkrecht auf A_1 und A_2 stehen, sind Kraftlinien; alle senkrechten Schnitte der zylindrischen Flächen,

die als Direktrix eine Kraftlinie und als Generatrix eine zu A_1 und A_2 parallele Gerade haben, sind ebenfalls Kraftlinien. Eine beliebige dieser zylindrischen Flächen bildet mit der Ebene, welche durch die Geraden A_1 und A_2 gelegt ist, eine Kraftröhre, durch welche der Fluss konstant ist.

Betrachten wir eine zylindrische Fläche mit einer Generatrix parallel zu den beiden Geraden und mit der beliebigen Linie PQ, deren Ende Q sich in der Ebene A_1A_2 befindet, als Direktrix; wenn wir, die Generatrix Q festhaltend, die Generatrix P derart verschieben, dass der Fluss durch die Fläche PQ konstant bleibt, so beschreibt die Generatrix P eine zylindrische Fläche, einen geometrischen Ort von Kraftlinien.

Jede der auf A_1 und A_2 vorhandenen elektrischen Massen bringt durch die Fläche PQ bezw. die Flüsse

$$\varphi_1 = 2\varkappa l\lambda\omega_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -2\varkappa l\lambda\omega_2$$

hervor; der resultierende Fluss ist

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varkappa l\lambda(\omega_1 - \omega_2).$$

Aus der Betrachtung des Dreiecks PA_1A_2 ergiebt sich: $\Theta = \omega_1 - \omega_2$, und daher ist

$$\varphi = 2kl\lambda\Theta.$$

Die Gleichung der Kraftlinien in der Ebene ist also

$$\Theta = \text{Konst.}$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Kreisen, die durch A_1 und A_2 hindurchgehen, und deren Zentren sich auf der Geraden befinden, welche senkrecht auf der Geraden A_1A_2 in ihrem Mittelpunkt O errichtet ist.

Die Niveauflächen sind zylindrische Flächen, mit einer Generatrix parallel zu den Geraden A_1 und A_2, deren Gleichung wir leicht finden können. Das Potential in einem beliebigen Punkte ist

$$V = V_1 + V_2;$$

nun ist

$$V_1 = \text{Konst.} - 2\varkappa\lambda \log r_1 \quad \text{und} \quad V_2 = \text{Konst.} + 2\varkappa\lambda \log r_2,$$

folglich

$$V = \text{Konst.} + 2\varkappa\lambda \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Die allgemeine Gleichung der Niveauflächen $V = \text{Konst.}$ giebt uns in diesem Falle

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{Konst.}$$

Diese Gleichung stellt in der Zeichnungsebene die Kreise dar, deren Durchmesser EF so auf der Geraden A_1A_2 gelegen sind, dass die

Punkte A_1, A_2, E und F in harmonischer Beziehung zu einander stehen, d. h. dass

$$\frac{A_2E}{A_1E} = \frac{A_2F}{A_1F}.$$

Man kann diese Kreise leicht konstruieren. Man ziehe die in A_1 zu XX senkrechte Gerade z_1z_1 und von einem beliebigen Punkte M derselben die Gerade A_2M und die Normale dazu; letztere bestimmt auf A_1A_2 das Zentrum C des Kreises, der durch M geht. In analoger Weise konstruiert man die Kreise, die durch die Punkte der in A_2 zu XX senkrechten Geraden z_2z_2 hindurchgehen.

Die Niveauflächen bilden zwei Systeme, wovon das eine um die Gerade A_1, das andere um die Gerade A_2 angeordnet ist; die beiden Systeme sind durch die Ebene yy, welche selbst eine Niveaufläche ist, getrennt.

Wenn wir uns auf den Raum zwischen den beiden Niveauflächen V und V' beschränken, so können wir, nach den im vorigen Abschnitte erörterten Betrachtungen, die beiden ins Auge gefassten, geradlinigen elektrischen Verteilungen durch diejenigen elektrischen Massen ersetzen, die durch Induktion auf diesen Flächen entstehen, wenn man sie metallisch verkörpert; die auf den beiden zylindrischen Flächen pro Längeneinheit der Achse verteilte Elektrizitätsmenge ist gleich der Dichte der geradlinigen Verteilungen.

Diese Überlegung gestattet uns, das eben gemachte Studium auf die von zylindrischen Verteilungen erzeugten Felder auszudehnen, d. h. auf Felder, die von zwei entgegengesetzt gleichen, auf zwei parallelen Konduktoren (entweder beide zylindrisch, oder der eine eben und der andere zylindrisch) verteilten Massen erzeugt sind. Und zwar werden wir das System der zwei elektrisierten Konduktoren immer durch zwei geradlinige Verteilungen ersetzen können, welche eine Dichte gleich der auf den Konduktoren pro Längeneinheit verteilten Elektricitätsmenge besitzen, und die so angeordnet sind, dass die Oberflächen der beiden Konduktoren Niveauflächen in dem von den geradlinigen Verteilungen erzeugten Felde sind.

40. Elektrostatische Kapazität. — Man betrachte einen isolierten Konduktor A in der Nähe anderer Konduktoren B', B'', B''' etc., die in metallischer Verbindung mit der Erde stehen, und setze voraus, dass anfänglich auch A das Potential Null besitze. Wenn man dem Konduktor A eine positive Ladung erteilt, so hat diese durch Influenz auf den anderen Konduktoren negative Ladungen zur Folge. Das Potential der Konduktoren B wird dadurch nicht verändert, während A ein Potential V annimmt,

dessen Wert durch die Formel (2) berechnet werden kann, wobei man nicht nur die dem Konduktor A erteilte elektrische Masse, sondern auch alle auf den anderen Konduktoren induzierten Massen in Betracht zu ziehen hat.

Ohne die Lage der Körper zu verändern, gebe man dem Konduktor A eine zweite, der vorigen gleiche Ladung; diese zweite Ladung verteilt sich auf der Oberfläche von A nach demselben Gesetze, nach welchem die erste Ladung sich verteilt hat, und bringt daher durch Induktion dieselben Massen wie vorhin auf dem anderen Körpern hervor. Dadurch, dass man die Ladung von A verdoppelt hat, hat sich in jedem der Posten $\frac{m}{r}$, die in dem Ausdrucke des Potentials vorkommen, m verdoppelt, während r unverändert geblieben ist; man hat also auch den Wert des Potentials verdoppelt.

Man kann daher sagen, dass zwischen dem Potential V, welches ein isolierter Konduktor in der Nähe anderer Konduktoren vom Potential Null durch das Auftreten der Ladung M annimmt, und der Ladung selbst, die Proportionalitätsbeziehung besteht

$$M = CV. \tag{7}$$

Allgemeiner kann man sagen: es ist die Ladung M, die man einem, gegebenen Konduktor in der Nähe von anderen mit konstantem Potential erteilen muss, um sein Potential vom Werte V_1 zum Werte V_2 zu bringen proportional der Differenz $V_2 - V_1$, d. h.

$$M = C(V_2 - V_1). \tag{7'}$$

Die Proportionalitätskonstante C nennt man *elektrostatische Kapazität.* Die vorigen Beziehungen geben für die Kapazität den Ausdruck:

$$C = \frac{M}{V}; \qquad C = \frac{M}{V_2 - V_1}; \tag{7''}$$

wenn man $V = 1$, bezw. $V_2 - V_1 = 1$ setzt, so hat man:

$$M = C;$$

daraus folgt, dass die *elektrostatische Kapazität eines Konduktors* diejenige Elektrizitätsmenge ist, die man ihm geben muss, um sein Potential um die Einheit zu erhöhen, während das Potential jedes anderen, in der Nähe befindlichen Konduktors konstant bleibt.

Die Betrachtungen selbst, durch welche wir angeleitet worden sind, von Kapazität zu reden, beweisen, dass letztere nicht nur von der Form und den Dimensionen des betrachteten Konduktors, sondern auch von der Form, den Dimensionen und der Lage aller anderen in der Nähe befindlichen Konduktoren abhängt.

Die Kapazität eines Konduktors nimmt zu, wenn man ihm einen anderen, mit der Erde verbundenen Konduktor nähert.

Betrachten wir in der That nochmals den isolierten und positiv geladenen Konduktor A, in der Nähe anderer, mit der Erde verbundenen Konduktoren, und nähern wir ihm einen von den Körpern B; wir vermindern dadurch die Entfernung der zu A gehörigen Punkte von den auf diesem Körper induzierten negativen Massen, d. h. wir vergrössern in dem Ausdrucke des Potentials den Wert der negativen Posten $-\frac{m}{r}$. Es folgt daraus, dass man, ohne die Ladung des Konduktors A zu verändern, nur dadurch, dass ihm ein mit der Erde verbundener Konduktor genähert wurde, den Wert des Potentials verkleinert und folglich den Quotienten $\frac{M}{V}$, d. h. die Kapazität von A, erhöht hat.

41. Kondensatoren. — Die oben erwähnte Eigenschaft bietet uns ein Mittel, durch zwei Konduktoren, von denen der eine isoliert, der andere zur Erde abgeleitet ist, und die ausgedehnte, in sehr kleinem Abstand einander gegenüberliegende Flächen besitzen, grosse Kapazitäten zu erzeugen. Es seien z. B. A und B zwei ebene, parallele, von einer dünnen Luftschicht getrennte Platten. Abgesehen von den den Rändern nahe gelegenen Teilen ist das Feld zwischen den beiden Platten gleichförmig; man hat auf den Platten zwei gleiche, ungleichnamige und gleichartig verteilte Ladungen; jeder Masse $+m$ auf A entspricht eine gleiche Masse $-m$ auf B. In dem Ausdrucke des Potentials in einem beliebigen Punkte P der Platte A entspricht, wenn r und r' die Abstände des Punktes P von den korrespondierenden Elementen $+m$ und $-m$ sind, jedem Posten $\frac{m}{r}$ ein Posten $-\frac{m}{r'}$. Nun kann man, wenn man den Abstand zwischen den Platten klein genug wählt, r' wenig verschieden von r, d. h. V sehr klein und C sehr gross, erhalten.

Diese Ableitung ist noch strenger für den Fall, dass der Konduktor B den Konduktor A vollständig einschliesst. Jede Röhre, die von A ausgeht, trifft B; die Massen auf A und B sind vollkommen gleich. Es wird genügen, die gegenüberliegenden Flächen gross und die dazwischenliegende Schicht klein genug zu machen, um eine beliebig grosse Kapazität zu erzielen.

Das System zweier Konduktoren, welche grosse, in kleinem Abstand einander gegenüber liegende Flächen bieten, nennt man *Kondensator;* nachdem man einen der Konduktoren zur Erde abgeleitet hat, kann man, der grossen Kapazität wegen, dem anderen mächtige Ladungen erteilen,

d. h. grosse elektrische Massen auf ihm anhäufen, ohne das Potential erheblich zu erhöhen.

Die beiden Konduktoren heissen die *Belegungen* oder *Armaturen* des Kondensators. Ein Kondensator heisst *geschlossen*, wenn eine der Belegungen von einer geschlossenen, die andere vollständig einschliessenden Fläche gebildet ist, und heisst *offen*, wenn dies nicht der Fall ist. *Kapazität eines Kondensators* ist die Kapazität einer seiner Belegungen, während die andere zur Erde abgeleitet ist, d. h. ist die Ladung, die man einer der Belegungen geben muss, um ihr Potential um die Einheit zu erhöhen, während die andere Belegung in Verbindung mit der Erde, oder allgemeiner auf konstantem Potential gehalten wird.

Die Kapazität ist nur für die geschlossenen Kondensatoren eine vollständig bestimmte Grösse, weil die äussere Armatur als elektrischer Schirm für die innere dient, welche keinen äusseren Einfluss empfindet. Für die offenen Kondensatoren ist dies nicht mehr streng richtig, aber in den Fällen der Praxis kann es mit hinreichender Annäherung als richtig angenommen werden, weil, wegen der grossen Fläche der Belegungen und ihrer kleinen Entfernung von einander, die Änderungen, welche die fremden Körper in der Verteilung der Ladung hervorbringen können, einen sehr kleinen Bruchteil der gesamten Ladung ausmachen, der vernachlässigt werden kann.

Betrachten wir einen geladenen Kondensator, d. h. einen Kondensator, in welchem eine Potentialdifferenz zwischen den Belegungen erzeugt wurde, indem man einer der Belegungen eine Elektrizitätsmenge M erteilte. Wenn wir die beiden Belegungen metallisch verbinden, so bilden dieselben einen einzigen Konduktor, auf welchem das Potential verschiedene Werte besitzt; das Gleichgewicht ist nicht mehr möglich, es muss daher eine Bewegung der Elektrizität stattfinden, und zwar muss die Masse $+M$ von einer zur anderen Belegung übergehen und die gleiche Masse $-M$ aufheben; das Potential beider Belegungen wird gleich Null; auf diese Weise haben wir den Kondensator entladen.

Bei der Entladung eines Kondensators entwickelt sich eine gewisse Energiemenge, und in der That kann man in dem Konduktor, welcher die beiden Belegungen verbindet, immer eine Erwärmung wahrnehmen; wenn die Potentialdifferenz genügend hoch gemacht wird, so findet die Entladung durch das Medium hindurch statt, bevor eine metallische Verbindung hergestellt ist, und zeigt sich dann durch den Funken an, welcher von Geräusch, Licht- und Wärmeerscheinungen begleitet wird. Diese Energie, die bei der Entladung entwickelt wird, war zuerst in dem Kondensator aufgespeichert. Um einen Kondensator zu laden, muss man eine Arbeit aufwenden, welche im Kondensator selbst angehäuft bleibt

und bei der Entladung in Form von Licht, Wärme und mechanischer Arbeit zurückgegeben werden kann.

Wir können die gesamte, in einem geladenen Kondensator aufgespeicherte Energie leicht berechnen. Wenn V_1 und V_2 die Potentiale der Belegungen sind und M die elektrische Ladung ist, welche (genau für die geschlossenen, sehr angenährt für die offenen Kondensatoren) denselben Wert auf beiden Belegungen besitzt, so giebt die Formel (4) für die Energie den Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2} M(V_2 - V_1) \tag{8}$$

und infolge der Gleichungen (7'), (7'')

$$W = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C}, \tag{8'}$$

$$W = \frac{1}{2} C(V_2 - V_1)^2. \tag{8''}$$

42. Spezifisches Induktionsvermögen oder Dielektrizitätskonstante. — Von einem Kondensator haben wir bis jetzt nur die beiden metallischen Belegungen, welche wir als Sitz der elektrischen Ladungen annahmen, betrachtet; jetzt müssen wir untersuchen, welchen Anteil bei den Erscheinungen von Ladung und Entladung das zwischen den Belegungen liegende, isolierende Medium hat.

Nehmen wir einen Kondensator, bei welchem man die beiden Belegungen und das zwischenliegende Medium vollständig von einander trennen kann, bestehend z. B. aus zwei metallischen Bechern, zwischen welchen sich ein passender Glasbecher befindet derart, dass die Metallbelegungen sich ihm eng anschmiegen.*)

Nachdem wir diesen Kondensator geladen haben, trennen wir die einzelnen Teile von einander und sorgen dafür, dass er dabei nicht entladen wird. Wir können dann die beiden Armaturen mit einander in Berührung bringen, ohne dass sich eine bemerkenswerte Erscheinung zeigt; wenn wir aber den Kondensator wieder zusammensetzen, so können wir eine Entladung fast so wie jene bekommen, die man erhält, wenn man denselben entladet, ohne ihn zuvor zerlegt zu haben.

Dieser Versuch beweist, dass in der Erscheinung der Entladung eines Kondensators das Medium nicht nur die rein passive Aufgabe hat, die Belegungen von einander zu isolieren, sondern dass es einen thätigen, wichtigen Anteil übernimmt; die Ladung hat ihren Sitz wesentlich in dem Medium und nicht in den Belegungen. Welches auch die Natur der

*) Es sind dies die wesentlichen Bestandteile einer Leydner Flasche.

Ladung sei, wir werden ihre Ursache stets in einer Veränderung der Zustände des Mediums und nicht in einem besonderen Zustande der Belegungen zu suchen haben.

Die experimentellen Resultate gehen noch weiter. Es hat nicht nur die Ladung ihren Sitz in dem Medium, sondern es hängt auch von der Natur des letzteren die Grösse der maximalen Ladung ab, d. h. auf die Kapazität des Kondensators haben nicht nur die Lage und die Dimensionen der Belegungen, sondern auch die Natur des dazwischenliegenden Mediums Einfluss. Dies wird durch Versuche erwiesen, welche an Kondensatoren angestellt werden, in denen man, ohne die Fläche und den Abstand zwischen den Armaturen zu verändern, das zwischenliegende Medium variieren kann.

Die Verhältnisse unter den Kapazitäten desselben Kondensators bei verschiedenen Medien sind unabhängig von der Form und den Dimensionen des Kondensators; sie sind spezifische Grössen der isolierenden Substanzen, welche das Medium bilden.

Faraday, dem wir diese wichtige Entdeckung verdanken, nannte *spezifisches Induktionsvermögen* eines gegebenen Isolators das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \tag{9}$$

der Kapazität C eines beliebigen, mit diesem Isolator versehenen Kondensators zu der Kapazität C_0 desselben Kondensators, in welchem man, unter sonst gleichen Umständen, den betreffenden Isolator durch eine gleiche Luftschicht ersetzt.

Theoretisch wäre es vorzuziehen, das spezifische Induktionsvermögen auf das absolute Vakuum zu beziehen, aber dies würde die experimentellen Bestimmungen sehr erschweren. Übrigens ist die Differenz zwischen dem Verhalten der Luft und dem des Vakuums so klein, dass das spezifische Induktionsvermögen der verschiedenen Substanzen praktisch als auf das Vakuum bezogen angesehen werden kann.

Die experimentelle Bestimmung der Werte von ε bietet in der Praxis grosse Schwierigkeiten deswegen, weil die Kapazität eines Kondensators nie eine genau bestimmte Grösse ist; sie kann vielmehr sehr viel variieren, je nach den Umständen, unter welchen man experimentiert. So nimmt die Kapazität mit der Zeit zu, die man zur Ladung verwendet, sie nimmt dagegen ab mit dem Wachsen der Zeit, während welcher man den Kondensator geladen lässt, bevor man ihn entladet. Ferner entladet sich nicht die gesamte Elektrizität, sobald man die Verbindung zwischen den beiden Belegungen herstellt, sondern man kann nach der Hauptentladung aufeinanderfolgende Entladungen rückständig verbliebener Elektrizitätsmengen wahrnehmen. Aus diesen Gründen fällt es nicht nur

schwer, solche Bestimmungen zu machen, sondern auch die zu messende Grösse gut zu definieren. Man erklärt sich so die Unterschiede der von den verschiedenen Forschern ermittelten Werte für ε. Der Versuch erlaubt nicht den exakten Wert des spezifischen Induktionsvermögens jeder Substanz zu bestimmen, sondern eher die Grenzen, zwischen welchen dieser Wert liegt.

Man hat z. B. für einige wichtige Körper folgende Werte gefunden:

$\varepsilon = 1$ . . . . . für Luft (der Definition nach);
$= 1$ . . . . . sehr angenähert für das absolute Vakuum und für die Gase. Für einige Gase ist der Wert um etliche Tausendstel kleiner, für andere grösser als die Einheit;
$= 1{,}6$ . . . . . für Seide;
$= 1{,}9$ bis $2{,}3$ für Paraffin;
$= 2{,}34$ . . . . für reinen elastischen Gummi;
$= 2{,}5$ bis $3{,}5$ für vulkanisierten Gummi;
$= 2{,}8$ bis $4{,}2$ für Schwefel;
$= 3$ bis 5 . für Guttapercha;
$= 5$ . . . . . für Glimmer;
$= 2$ bis 5 . für schweres, leicht schmelzbares Glas (flint);
$= 5$ bis 10 . für leichtes, schwer schmelzbares Glas (crown).

Trotz der Unsicherheit solcher experimentellen Bestimmungen sind die Unterschiede zwischen den verschiedenen Körpern so charakteristisch, dass sie deutlich nachweisen, wie gross die Bedeutung des isolierenden Mediums in einem Kondensator ist; die Ladung hat ihren Sitz in dem Medium, die beiden Armaturen sind nichts anderes, als ein Mittel, um mit grossen Oberflächen und dünner Schicht von Isolatoren arbeiten zu können.

Aber wenn dies für die Kondensatoren richtig ist, so liegt es nahe, dieselben Erwägungen allgemein auf alle elektrostatischen Erscheinungen auszudehnen. Ein Kondensator ist nichts anderes, als ein besonderer Fall eines elektrostatischen Systems; die Verschiedenheiten sind rein geometrischer Natur. Man kann durch kleine Abstufungen, in welchen man die Entfernung, die Form und die Dimensionen der Belegungen variiert, zu dem System zweier beliebigen Konduktoren übergehen, ohne durch diesen Übergang die physikalischen Bedingungen der Erscheinung im geringsten zu verändern. Diese Ableitungen für den einfachen Fall zweier Kondensatoren kann man gleich auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Feldes ausdehnen. So sind wir zu der Annahme geführt, dass bei den elektrischen Erscheinungen das isolierende Medium die wesentlichste Rolle spielt; von dem Medium hängen die elektrischen Ladungen, die Potentialdifferenzen und die Energie des Systems ab. Nur in den Nichtleitern zeigen sich die elektrischen Kräfte wirksam; die Konduktoren sind dagegen durch eine negative Eigenschaft gekennzeichnet, durch die Unfähigkeit,

Sitz elektrischer Kräfte zu sein; sie stellen gewissermassen Lücken im elektrostatischen Felde dar.

Die nichtleitenden Körper wurden von Faraday, eben ihrer Eigenschaft wegen, die elektrischen Kräfte zu übertragen, *Dielektrika* genannt. Das spezifische Induktionsvermögen ε, welches eine spezifische Grösse ist und die Eigentümlichkeiten jedes Dielektrikums definiert, heisst *Dielektrizitätskonstante.*

Die Erfahrung weist uns also darauf hin, dass im Dielektrikum und nicht in den Konduktoren die elektrischen Kräfte und die Energie des Feldes ihren Sitz haben; was auch immer die Ursachen der elektrostatischen Erscheinungen sein mögen, es ist sicher, dass dieselben nicht in besonderen Zuständen der Konduktoren, sondern des Dielektrikums zu suchen sind. Wenn ein elektrisches Feld vorhanden ist, so befindet sich das Dielektrikum in diesem Felde in einem Zwangszustande des Gleichgewichts; jedes seiner Elemente ist besonderen Deformationen unterworfen.

43. Polarisation. Verschiebung. — Die Entwickelung der Erscheinungen und Gesetze der elektrischen Felder hat uns zu dem Schlusse geführt [33], dass unter rein mechanischem Gesichtspunkte ein elektrostatisches Feld sowohl als ein System von Newton'schen Kräften, welche unter den elektrischen Massen in die Ferne wirken, wie auch als ein System von Spannungen pdS, welche im Dielektrikum existieren und sich längs der Kraftröhren fortpflanzen, angesehen werden kann. Nun haben uns die Betrachtungen im vorigen Abschnitte bewiesen, dass das Feld seine Existenz nicht einem besonderen Zustande der Konduktoren, auf welchen die elektrischen Massen verteilt sind, sondern einem besonderen Zustande des zwischen den Konduktoren gelegenen Dielektrikums, in welchem sich die elektrischen Kräfte zeigen, verdankt. Es liegt daher näher und entspricht den experimentellen Thatsachen besser, das elektrische Feld als ein System von Spannungen im Dielektrikum zu behandeln.

Ohne es zu wagen, irgend welche Hypothese über die Natur der Deformationen aufzustellen, welche die Spannungen des Dielektrikums und folglich die elektrischen Kräfte erzeugen, können wir sogleich die Ähnlichkeit bemerken, welche zwischen den Deformationen und Kräften im Dielektrikum einerseits und den Deformationen und Kräften in einem elastischen Körper andererseits besteht.

Ein elastischer Körper deformiert sich, wenn wir durch ihn eine Kraft übertragen wollen, und die Deformation bringt innere Kräfte hervor; in ganz analoger Weise deformiert sich ein Dielektrikum, in welchem man ein elektrisches Feld erzeugt, und die elektrischen Kräfte sind die Folge dieser Deformationen. Wie in einem deformierten elastischen Körper

Energie aufgespeichert ist, welche zurückgegeben wird, sobald die deformierende Ursache aufhört, so stellt ein elektrisches Feld eine Energie dar, welche zurückerstattet wird, wenn die Deformation verschwindet, welcher das Feld selbst sein Vorhandensein verdankte.

So z. B. deformiert sich das Dielektrikum bei der Ladung eines Kondensators, in dem Dielektrikum und nicht in den Belegungen wird die Energie angehäuft; bei der Entladung verschwindet die Deformation des Dielektrikums, welches die Energie zurückgiebt, die vorher aufgewandt wurde, um es zu deformieren. Aber die Analogie zwischen den beiden physikalischen Erscheinungen ist noch vollständiger: wie es keine vollkommen elastischen Körper giebt und immer Erscheinungen von rückständiger Elastizität auftreten, wodurch das Zurückkehren zu der ursprünglichen Form nur stufenweise stattfindet, so giebt das Dielektrikum nicht auf einmal die gesamte angehäufte Energie her, sondern es bleiben rückständige Ladungen, die durch nachfolgende Entladungen nach und nach zum Verschwinden gebracht werden können.

Es ist das Verdienst Faradays, die hergebrachte Art und Weise bei der Behandlung der elektrischen Erscheinungen verlassen und zuerst die Betrachtung des Dielektrikums in den Vordergrund gerückt zu haben. Um eine anschauliche Vorstellung darüber zu gewinnen, wie sich die Kräfte in dem Dielektrikum fortpflanzen, stellte sich Faraday (nicht um Hypothesen aufzustellen, sondern um an die alten Auffassungen anzuknüpfen) das Dielektrikum als von kleinen, selbst leitenden, aber in einem durchaus isolierenden Medium schwimmenden Körperchen gebildet vor. Wenn man in diesen Raum einen elektrisierten Körper bringt, so wirkt er durch Influenz auf die benachbarten Körperchen und diese auf die folgenden. Auf diese Weise elektrisieren sich alle Körperchen und richten sich in eine fortlaufende Reihe, entsprechend der Gestalt der Kraftröhren (Fig. 34); so pflanzt sich durch successive Influenz die Elektrizität durch das Dielektrikum fort. Wenn dieser Darstellungweise Faradays auch das Verdienst gebührt, dem Dielektrikum einen hervorragenden Platz bei der Betrachtung und Erklärung der elektrischen Erscheinungen eingeräumt zu haben, so führt sie doch eine ganz willkürliche Hypothese über seine Zusammensetzung ein.

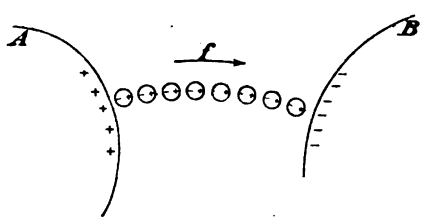

Fig. 34.

Lord Kelvin (vordem Sir William Thomson) gab, von denselben Auffassungen wie Faraday ausgehend, der Erscheinung eine Darstellung, welche den Vorzug hat, das Dielektrikum eine Rolle spielen zu

lassen, ohne irgend eine Hypothese, weder über dessen Konstitution, noch über die Natur der Elektrizität einzuführen. Lord Kelvin denkt sich das Dielektrikum durch Niveau- und Kraftröhrenflächen in Volumenelemente zerteilt und nimmt an, dass in dem vorhandenen Felde jedes einzelne Element auf den begrenzenden Niveauflächen denjenigen Bedingungen genüge, die erfüllt sein müssen, damit es an einer Seite positiv und an der anderen negativ geladen genannt werden kann. Indem man eine unendlich dünne Kraftröhre betrachtet (Fig. 35) und sie in Volumenelemente durch Niveauflächen zerlegt denkt, findet man, dass jedes Element nach obiger Anschauungsweise, wenn das Feld von links nach rechts gerichtet ist, auf der linken Seite eine negative und auf der rechten Seite eine positive Masse besitzt. Längs einer und derselben Kraftröhre sind die Massen gleich; ein beliebiger Schnitt ab einer Kraftröhre enthält folglich, als dem Element p angehörend, eine positive und, als dem benachbarten Element q angehörend, eine negative Masse; die beiden gleichen und dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Massen heben sich in ihren Fernwirkungen auf und können also vorhanden sein, ohne dass wir ihre Existenz konstatieren. Diesem besonderen Zustande des Dielektrikums giebt man den Namen *Polarisation.*

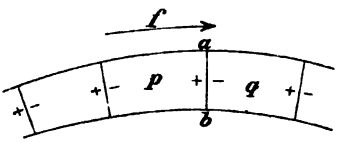

Fig. 35.

Die Erfahrung lehrt uns, dass in der Natur etwas Analoges wirklich geschehen muss. So findet man, wenn man in einem Stück Glimmer, das aus vielen parallel an einander liegenden dünnen Blättchen besteht, ein elektrisches Feld in der zu den Spaltebenen senkrechten Richtung erzeugt, indem man z. B. an die Aussenseiten entgegengesetzt elektrisch geladene Körper anlegt, dass, nachdem das Glimmerstück in seine einzelnen Blätter zerteilt wurde, jedes Blatt auf den beiden Seiten einander entgegengesetzte Ladungen besitzt.

Maxwell konnte, auf solchen Anschauungen fussend, die Polarisation durch Einführung des Begriffs der *elektrischen Verschiebung,* ohne willkürliche Hypothesen über die physikalische Natur der Elektrizität aufzustellen, einer strengen mathematischen Behandlung unterwerfen.

Betrachten wir eines der Elemente p (Fig. 36), in welche wir das Dielektrikum zerteilt dachten. Wenn das Feld in der Richtung f polarisiert ist, so hat man auf beiden Seiten von p gleiche, aber ungleichnamige Massen, $-m$ auf ab und $+m$ auf cd. Wenn man nun die Masse $+m$ durch eine unendlich kleine Verschiebung von cd nach ab bringt,

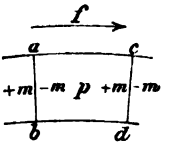

Fig. 36.

so legt sie sich dort über die gleiche negative Masse; die beiden Massen heben sich auf, und die Polarisation wird so vernichtet. Umgekehrt kann man sich denken, dass beide Massen zuerst in ab zusammenfallen und bei der Polarisation die Masse $+m$ sich nach cd verschiebt. Dies kann für jedes Element wiederholt werden; um uns also die Erscheinung der Polarisation zu erklären, können wir uns im Felde zwei gleiche elektrische Verteilungen, eine positive und eine negative denken. Wenn das Feld nicht vorhanden ist, fallen die beiden Verteilungen zusammen und heben sich auf; aber in dem Augenblicke, in welchem das Feld sich bildet, geht in jedem Volumenelement eine unendlich kleine Verschiebung der positiven Verteilung in der Richtung des Feldes vor sich. Die Polarisation kann auch dadurch erzeugt gedacht werden, dass man die positive Verteilung festhält und die negative in der dem Felde entgegengesetzten Richtung verschiebt, oder auch, dass man beide Verteilungen in einander entgegengesetzten Richtungen verschiebt. Wesentlich ist hier nur die relative und nicht die absolute Verschiebung der beiden Verteilungen.

Grösserer Einfachheit halber wird es angemessen sein, immer die Verschiebung der positiven Verteilung zu betrachten, welche in der Richtung des Feldes stattfindet, d. h. nach aussen bei positiv und nach innen bei negativ geladenen Konduktoren.

Es möge dS ein zu der Richtung, in welcher die Verschiebung stattfindet, senkrechtes Flächenelement sein; während diese Verschiebung geschieht, geht durch das Element eine Elektrizitätsmenge dm hindurch; das Verhältnis

$$b = \frac{dm}{dS}$$

in einem Punkte P des Elementes heisst *Wert der Verschiebung* in diesem Punkte.

Die Verschiebung ist eine Vektorgrösse; ihr Tensor ist durch die Elektrizitätsmenge gegeben, welche in dem Moment, in welchem die Polarisation stattfindet, die Einheit der zu ihrer Richtung senkrechten Fläche durchsetzt; ihre Richtung ist in jedem Punkte diejenige des Feldes, wenigstens wenn wir uns darauf beschränken, isotrope Körper zu betrachten.

Wenn in jedem Punkte die Verschiebung gegeben ist, so ist die Beschaffenheit des Feldes vollständig bestimmt.

In einem elektrischen Felde kann man unmittelbar durch den Versuch nur das Vorhandensein der Kraft konstatieren. Bei der Newton'schen Auffassung betrachtet man die Divergenz der Kraft; wo die Divergenz nicht den Wert Null hat, sagt man, dass eine elektrische Masse vorhanden ist, welcher man in Gedanken eine wirkliche Existenz zuschreibt.

Bei der Maxwell'schen Auffassung betrachtet man direkt den Vektor in jedem Punkte und denkt man sich den Vektor selbst verkörpert. Man hat so eine Vorstellung, welche direkter und weniger künstlich ist, und die gegen die Newton'sche Theorie den Vorzug bietet, unsere Betrachtungen auf das Dielektrikum zu lenken, wo, wie die Erfahrung lehrt, der Sitz der elektrischen Erscheinungen ist.

Die Maxwell'sche Theorie geht von einem anderen Grundbegriffe aus, aber sie beruht ebenfalls auf keiner besonderen Hypothese über die Natur der Elektrizität oder über die Zusammensetzung der Dielektrika und der Konduktoren, sie kann sogar mit jeder Hypothese in Übereinstimmung gebracht werden.

Wenn man z. B. das Feld als von einer thatsächlichen Deformation der Materie erzeugt, oder als von einer Orientierung der kleinen Masseteilchen bedingt annähme, wäre es stets möglich, diese Deformation oder diese Orientierung durch die Maxwell'sche Verschiebung darzustellen.

In Punkten, welche der Oberfläche der Konduktoren angehören, ist der Wert der Verschiebung gleich dem Wert der elektrischen Flächendichte; der Verschiebungsfluss durch eine gegebene Fläche ist gleich der auf ihr verteilten elektrischen Masse; wenn der Fluss austritt, so ist die Masse positiv, wenn er eintritt, negativ.

Der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss der Verschiebung ist gleich der Summe der elektrischen Massen, welche innerhalb der Fläche enthalten sind; diese Summe ist im allgemeinen von Null verschieden, und folglich hat die Verschiebung keine solenoidische Verteilung. Der Grenzwert des Verhältnisses des aus der Fläche austretenden Flusses zu dem von ihr begrenzten Volumen, d. h. die Divergenz des Vektors b, ist gleich der elektrischen Dichte in diesem Raume.

Nur im Dielektrikum ist die Verschiebung solenoidisch verteilt; ihr Fluss ist konstant längs einer und derselben Kraftröhre. Daraus ergiebt sich unmittelbar das Theorem der korrespondierenden Flächen.

Die eben gemachten Betrachtungen gelten für sich im Gleichgewichte befindende elektrische Felder, aber es wird gut sein, auch den Augenblick zu betrachten, in dem die Polarisation stattfindet. Wenn innerhalb einer beliebigen, geschlossenen Fläche eine positive elektrische Masse erzeugt wird, so muss nach dem Prinzip der Erhaltung der Elektrizität notwendigerweise auch eine gleiche, negative Masse entstehen. Dies bedeutet, dass durch eine beliebige, geschlossene Fläche, durch welche ein Verschiebungsfluss austritt, ein solcher mit gleicher Grösse eintreten muss; der gesamte Fluss ist gleich Null.

Diese Eigenschaft, welche die Erfahrung in der Gesamtheit der Erscheinungen als richtig erweist, muss, solange ein Gegenbeweis fehlt, als

in jedem Element bestehend angenommen werden. Daher werden wir sagen, dass die elektrische Verschiebung in dem Moment, in dem sie stattfindet, solenoidische Verteilung besitzt; die Verschiebungslinien sind in sich geschlossene Linien, die durch die Dielektrika und die Konduktoren hindurchgehen.

Die elektrische Verschiebung breitet sich also, während sie erzeugt wird, in ganz analoger Weise aus, wie sich in der ganzen Masse einer Flüssigkeit mit unveränderlichem Volumen die in einem ihrer Punkte erzeugte Verschiebung fortpflanzt. Innerhalb irgend einer geschlossenen Fläche kann kein Volumen der Flüssigkeit eintreten, ohne dass zur gleichen Zeit ein gleiches Volumen herausfliesst.

Die elektrische Verschiebung findet im ganzen Raume statt; in den Dielektriken setzen sich der Verschiebung elastische Gegenwirkungen entgegen, welche mit dem Wachsen der Verschiebung zunehmen; in den Konduktoren entstehen solche Gegenwirkungen nicht. Wir können uns das verschiedene Verhalten der Dielektrika und der Konduktoren materiell vorstellen, indem wir auf den Vergleich mit den im Innern einer nicht-zusammendrückbaren Flüssigkeit vor sich gehenden Verschiebungen zurückgreifen. Denken wir uns im Dielektrikum die Niveauflächen und die Flussröhren durch Membranen verkörpert, welche einer Deformation, obwohl nachgebend, doch elastische Reaktionen entgegensetzen; das Dielektrikum stellt sich so in viele Zellen zerteilt dar, welche wir uns mit der Flüssigkeit erfüllt denken. Auf diese Weise kann sich wohl eine Verschiebung in der Flüssigkeit fortpflanzen, aber es werden die Membranen deformiert, und diese entwickeln elastische Gegenwirkungen gegen die Verschiebung. In den Konduktoren dagegen existieren entweder solche Membranen nicht, oder sie weichen jedem noch so kleinen Zwange, ohne elastische Gegenwirkungen hervorzubringen.

Wir werden sehen, dass auch die Konduktoren der elektrischen Verschiebung Widerstand leisten; dieser ist aber nur ein passiver Widerstand, der Energie verzehrt, nicht ein elastischer Widerstand, der Energie aufspeichert, um sie wieder zurückzuerstatten.

Die soeben angestellte Betrachtung über die Verschiebung einer unverdichtbaren Flüssigkeit, welche nur als eine mögliche, mechanische Darstellung des Phänomens aufzufassen ist und nicht eine Erklärung desselben sein soll, macht die Analogie der elektrischen Polarisation mit der elastischen Deformation noch handgreiflicher. Die elektrische, wie die deformierende Kraft ist proportional der Kraft, mit welcher das, was sich verschiebt oder deformiert, die elastischen Gegenwirkungen überwindet; sie ist also proportional der elastischen Gegenwirkung selbst und hat die entgegengesetzte Richtung, d. h. die Richtung der Verschiebung.

44. Physikalische Bedeutung der konstanten Faktoren k und ε. — In einem der Oberfläche eines Konduktors unendlich nahen Punkte besteht zwischen der Kraft f und der elektrischen Dichte σ die Beziehung $f = 4\pi k\sigma$. Auf der Oberfläche eines Konduktors haben Dichte und elektrische Verschiebung b gleichen Wert, man hat also auch:

$$f = 4\pi k b, \quad b = \frac{f}{4\pi k}. \tag{10}$$

Nun sind beide Vektoren b und f in dem Dielektrikum solenoidisch verteilt; ihr Verhältnis bleibt sich längs einer und derselben Kraftröhre gleich. Die soeben abgeleiteten Beziehungen gelten also im allgemeinen für jeden Punkt des Dielektrikums.

Im elektrischen Felde sind Verschiebung und Kraft einander proportional, gerade wie in einem elastischen Körper Proportionalitätsbeziehung zwischen der Deformation und der deformierenden Kraft besteht.

Um die Verschiebung *Eins* zu erzeugen, ist eine Kraft $f_0 = 4\pi k$ erforderlich.

In der Elastizitätslehre heisst der Proportionalitätsfaktor, welcher die Kraft angiebt, die nötig ist, um in einem Stabe mit der Länge und dem Querschnitt *Eins* die Verlängerung *Eins* hervorzubringen, Elastizitätskoeffizient. In analoger Weise könnte man die Konstante $4\pi k$ *Koeffizient der elektrischen Elastizität* des Dielektrikums nennen; ihr Wert ist für verschiedene Dielektrika verschieden. Diese physikalische Interpretation des Faktors k der Coulomb'schen Formel ergiebt klar, dass er nicht ein einfacher, numerischer Koeffizient, sondern eine wahre, physikalische Grösse ist.

Zwischen dem Faktor k und der Dielektrizitätskonstante ε besteht eine bemerkenswerte Beziehung.

Von einem aus zwei parallelen, ebenen und um D von einander entfernten Belegungen bestehenden Kondensator betrachten wir einen weit von den Rändern entfernten Teil vom Inhalte S; auf jeder der Belegungen ist eine Masse $M = S\sigma$ gleichförmig verteilt; die zu den Belegungen senkrechte Kraft hat in jedem Punkte den konstanten Wert $f = 4\pi k\sigma$; zwischen den Belegungen besteht eine Potentialdifferenz

$$V_1 - V_2 = \int_0^D f\,dn = fD = 4\pi k\sigma D.$$

Der allgemeine Ausdruck

$$C = \frac{M}{V_1 - V_2}$$

giebt für die Kapazität des betrachteteten Stückes den Wert

$$C = \frac{S}{4\pi k D}$$

an.

Aus dieser Beziehung geht hervor, dass die Kapazität eines Kondensators umgekehrt proportional dem Faktor k ist; andererseits ist, nach der Definition der Dielektrizitätskonstanten ε selbst, die Kapazität proportional zu ε, und daher sind ε und $\frac{1}{k}$ einander proportional, d. h.

$$\varepsilon k = \text{numerische Konstante.}$$

Welches der Wert dieser Konstanten ist, wissen wir nicht. In der That ist uns für keinen Körper der absolute Wert der Dielektrizitätskonstanten bekannt; um durch Zahlen die relativen Werte von ε für die verschiedenen Körper ausdrücken zu können, haben wir als Einheit den Wert der Dielektrizitätskonstanten eines bestimmten Körpers angenommen, und zwar den der Luft oder besser den des Vakuums. Es ist uns auch der absolute Wert des Faktors k für keine Substanz bekannt; wir können deshalb einen willkürlichen Wert für eine gegebene Substanz annehmen, und zwar nimmt man $k = 1$ für die Luft oder besser für das Vakuum an. Dies ist die Hypothese, die man dem elektrostatischen System der elektrischen Masseinheiten zu Grunde legt.*)

Nach diesen Hypothesen hat man für das Vakuum und folglich für alle Körper

$$\varepsilon k = 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{k}.$$

Die Beziehungen (10) zwischen der Kraft und der elektrischen Verschiebung können auch unter die Form

$$f = \frac{4\pi}{\varepsilon} b, \quad b = \frac{\varepsilon}{4\pi} f \tag{10'}$$

gebracht werden.

Die Dielektrizitätskonstante zeigt sich uns also als eine Grösse, welche proportional der Verschiebung ist, die durch eine gegebene Kraft hervorgerufen wird; sie giebt das Mass der Fähigkeit des Dielektrikums, sich zu polarisieren, an; man könnte sie daher *Koeffizient der elektrischen Durchlässigkeit* nennen.

45. Energie eines elektrischen Feldes. — In der Newton'schen Theorie ist die Energie eines elektrischen Feldes durch den allgemeinen Ausdruck gegeben

$$W = \frac{1}{2} \sum m V.$$

Nach der Maxwell'schen Auffassung hat die Feldenergie ihren Sitz nicht in den Konduktoren, auf denen die elektrischen Massen verteilt sind, sondern in dem Dielektrikum, in dem die Kraft und die elektrische Ver-

*) Siehe Anhang über die Masseinheiten.

schiebung sich bemerkbar machen; die Energie muss daher in jedem Punkte als Funktion der Werte von b und f durch ein auf das ganze Dielektrikum ausgedehntes Integral ausdrückbar sein. Wenn wir auf diese Weise den Ausdruck der Energie umformen können, erhalten wir eine Bestätigung dafür, dass beide, die Newton'sche und die Maxwell'sche Theorie, vom rein mathematischen Gesichtspunkte aus gleichwertig sind.

Bei der Berechnung des Ausdruckes $\sum mV$ betrachten wir die Posten, die von den auf korrespondierenden Elementen verteilten Massen herkommen, getrennt.

Wir betrachten z. B. eine unendlich dünne Kraftröhre zwischen zwei Konduktoren A und B (Fig. 37), auf welchen das Potential die Werte V_1 bezw. V_2 besitzt. Auf der Fläche ac, von welcher die Röhre ausgeht, ist die Masse $+ bdS$, auf der Fläche bd, auf welcher die Röhre endigt, die Masse $- bdS$ verteilt; diese Massen ergeben durch Summierung den Posten

$$(V_1 - V_2)bdS.$$

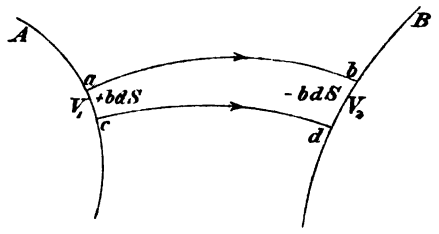

Fig. 37.

Wenn man durch $dv = dsdS$ das Volumenelement der Röhre darstellt und berücksichtigt, dass nach der Definition des Potentials selbst

$$V_1 - V_2 = \int_{ab} f ds,$$

und ferner der Fluss bdS längs der Röhre konstant ist, so hat man

$$\sum mV = \sum \int_{ab} bf dv.$$

Diese Summe stellt das auf alle Kraftröhren, d. h. auf das ganze elektrische Feld ausgedehnte Integral dar, oder, wenn wir wollen, auf den ganzen Raum, weil, wo das Feld Null, d. h. wo $f = 0$ ist, auch der entsprechende Posten des Integrals gleich Null ist; folglich nimmt der Ausdruck der Feldenergie die Form an:

$$W = \frac{1}{2}\int bf dv, \tag{11}$$

welche uns beweist, dass auch für die analytischen Ableitungen die Betrachtung der Energie, als im Dielektrikum verteilt, gerechtfertigt ist; welches aber thatsächlich die Verteilung der Energie ist, kann uns unsere Gleichung nicht sagen, weil sie durch ein Integral gegeben ist.

Es verdient jedoch hervorgehoben zu werden, dass unter den unendlich vielen Verteilungen, welche alle der Gleichung (11) genügen, die einfachste diejenige ist, die sich aus der Hypothese ergiebt, dass $\frac{1}{2} bfdv$ die Energie im Elemente dv darstelle, wo die Kraft und die Verschiebung bezw. die Werte b und f besitzen. Nach dieser Hypothese ist die in der Volumeneinheit vorhandene Energiemenge:

$$w = \frac{1}{2} bf. \tag{12}$$

In der Theorie der Elastizität giebt dieser Ausdruck die Arbeit, die man verrichten muss, um durch eine Kraft f eine Verlängerung b zu erzeugen; diese Arbeit wird dabei in dem deformierten Körper aufgespeichert. So besteht also auch hinsichtlich der Energieverhältnisse die schon mehrmals bemerkte Analogie zwischen den elektrischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen.

Indem man in die Formel (12) den aus der Formel (10′) gegebenen Wert von b einsetzt, hat man die in der Volumeneinheit vorhandene Energiemenge lediglich als Funktion der elektrischen Kraft ausgedrückt:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} f^2. \tag{12′}$$

46. Parallel- und Hintereinanderschaltung von Kondensatoren. Kapazität einiger Kondensatoren. — Angenommen, wir hätten n Kondensatoren, z. B. Leydner Flaschen, bei welchen die äussere Wirkung jeder einzelnen unmerklich ist, so dass sie einander nahe sein können, ohne dass eine beträchtliche gegenseitige Influenz zu befürchten ist.

Stellen wir die sogenannte *Parallelschaltung* her, d. h. verbinden wir alle inneren Belegungen mit einander und ebenso alle äusseren. Wir erhalten auf diese Weise einen einzigen Kondensator, dessen eine Belegung aus den Innenseiten sämtlicher Flaschen besteht, während die andere durch die Aussenseiten der letzteren gebildet wird, und dessen Kapazität wir mit C bezeichnen wollen. Wenn wir einer der Belegungen dieses Kondensators eine Ladung M erteilen und die andere auf konstantem Potential halten, so ist die Potentialdifferenz V zwischen den beiden Belegungen durch die Beziehung

$$CV = M$$

gegeben. Wenn nun $M_1, M_2, \cdots M_n$ die Ladungen und $C_1, C_2, \cdots C_n$ die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren sind, so ist

$$C_1 V = M_1 \quad C_2 V = M_2 \quad \cdots \quad C_n V = M_n$$

und durch Summation

$$(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) V = M_1 + M_2 + \cdots + M_n.$$

Es ist aber $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M$, folglich ist

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

Die Kapazität eines Systems parallel geschalteter Kondensatoren ist gleich der Summe der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren.

Wenn wir dagegen die n Kondensatoren isolieren und die äussere Belegung des einen mit der inneren des folgenden verbinden, so nennen wir dies *Hintereinanderschaltung* der Kondensatoren. Erteilen wir der inneren Belegung des ersten Kondensators eine Ladung M und halten wir die äussere Belegung des letzten auf konstantem Potential, so besteht wieder die Beziehung

a) $$\frac{M}{C} = V,$$

wobei C die Kapazität des Systems und V die Potentialdifferenz zwischen der Innenseite des ersten und der Aussenseite des letzten Kondensators ist. Die einzelnen Kondensatoren erhalten durch Influenz die gleiche Ladung M, und es gilt für dieselben

b) $$\frac{M}{C_1} = V_1 \quad \frac{M}{C_2} = V_2 \quad \cdots \quad \frac{M}{C_n} = V_n,$$

worin V_1, V_2, $\cdots$ V_n die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Kondensatoren sind, deren Summe

c) $$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V$$

ist.

Durch Addition erhalten wir aus den Gleichungen (b)

$$M\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

woraus durch Vergleichung mit den Gleichungen (a) und (c)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Der reziproke Wert der Kapazität eines Systems von hintereinandergeschalteten Kondensatoren ist gleich der Summe der reziproken Werte der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren.

Die allgemeine Formel $C = \frac{M}{V}$ setzt uns in den Stand, die Kapazität einiger Kondensatoren von besonderer Form zu berechnen, welche in der Praxis häufige Anwendung finden. Wir werden die Kapazität C_0 einiger Luftkondensatoren berechnen, indem wir für die Luft $k = 1$ voraussetzen, d. h. indem wir das System der elektrostatischen Einheiten zu Grunde legen [44]. Wenn der Kondensator dieselbe Form und dieselben Dimen-

sionen hat, aber von einem Dielektrikum mit dem spezifischen Induktionsvermögen ε gebildet ist, so ist seine Kapazität [42]

$$C = \varepsilon C_0.$$

1. *Kugelförmige Kondensatoren.* — Es seien O (Fig. 38) das Zentrum, R_1 und R_2 die Radien der beiden konzentrischen Kugelflächen, welche die Belegungen des Kondensators bilden. Nachdem man die äussere Belegung zur Erde abgeleitet hat, erteile man der inneren eine Ladung M; eine gleiche und entgegengesetzte Ladung $-M$ entsteht dann auf der inneren Fläche der äusseren Belegung. Durch die Wirkung dieser Ladungen, welche sich um R_1 bezw. R_2 vom Zentrum entfernt befinden, nimmt das Potential im Zentrum und folglich in jedem Punkte der inneren Belegung den Wert

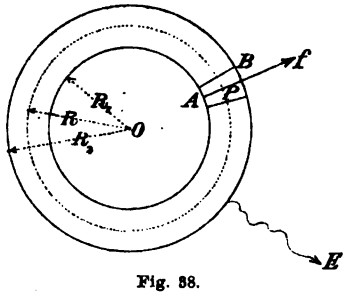

Fig. 38.

$$V = M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

an. Die Kapazität eines solchen Kondensators ist daher

$$C_0 = \frac{M}{M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$C_0 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{13}$$

Zu demselben Ausdrucke können wir gelangen, wenn wir die Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen berechnen, indem wir nicht von der Newton'schen Anschauungsweise ausgehen, sondern das elektrische Feld in der zwischenliegenden Luftschicht betrachten.

In diesem Felde sind, aus einfachen Symmetriegründen, die Niveauflächen konzentrische Kugelflächen, die Kraftlinien Strahlen, die durch das Zentrum hindurchgehen, die Kraftröhren im Dielektrikum liegende Teile von Kegeln mit der Spitze in O. Durch eine und dieselbe Röhre ist der Fluss konstant; deswegen ist die Kraft umgekehrt proportional dem Inhalte der Schnittflächen, welche der Kegel auf den Niveauflächen bildet, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrat der Radien dieser Kugelflächen.

Betrachten wir eine beliebige Kraftlinie AB und auf derselben einen Punkt P der Kugel vom Radius R. Bezeichnet σ die elektrische Dichte auf der inneren Belegung, so hat die Kraft im Punkte A den Wert $f_1 = 4\pi\sigma$ und im Punkte P den Wert

$$f = f_1 \frac{R_1^2}{R^2} = 4\pi\sigma \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Wenn man beachtet, dass die Kraft f die Richtung des Radius besitzt, so giebt uns die Formel (3):

$$dV = -fdR = -4\pi\sigma R_1^2 \frac{dR}{R^2},$$

und indem man längs der Linie AB integriert

$$V = 4\pi\sigma R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = 4\pi\sigma R_1^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right].$$

Die auf der Oberfläche der inneren Belegung verteilte Elektrizitätsmenge ist

$$M = 4\pi\sigma R_1^2.$$

Die Kapazität des Kondensators ist also

$$C_0 = \frac{M}{V} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

wie oben schon ermittelt wurde.

Wenn der Abstand $D = R_2 - R_1$ sehr klein und im Vergleiche mit dem Radius R einer der beiden Belegungen zu vernachlässigen ist, so kann man

$$C_0 = \frac{R^2}{D}$$

annehmen, und wenn man mit $S = 4\pi R^2$ den Flächeninhalt der Belegungen bezeichnet, so kann man setzen

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D}.$$

Betrachten wir auch den anderen Grenzfall, worin die Dicke des Dielektrikums unendlich gross ist; wenn man annimmt, dass R_1 endlich sei und R_2 nach dem Unendlichen strebe, hat man als Grenzwert

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} = R_1.$$

Dies ist der Fall einer im Raume isolierten, von jedem anderen Konduktor entfernten Kugel; ihre Kapazität ist im elektrostatischen Masssystem durch dieselbe Zahl wie der Radius ausgedrückt.

2. *Zylindrische Kondensatoren.* Die beiden Belegungen sind Kreiszylinder mit gemeinsamer Achse. In Fig. 39 stellen wir den zur Achse senkrechten Schnitt der beiden Zylinderflächen dar; R_1 und R_2 sind die Radien, O ist die Spur der Achse. Betrachten wir einen Teil des Kondensators von der Länge l, so weit von den Rändern entfernt, dass die elektrischen Ladungen auf den beiden Belegungen als gleichmässig verteilt angenommen werden können.

Im Dielektrikum sind der Symmetrie wegen die Niveauflächen koaxiale zylindrische Flächen, die Kraftlinien Radien der senkrechten Schnitte des Zylinders, die Kraftröhren Teile des Feldes, die von zwei durch die Achse hindurchgehenden und von zwei zur Achse senkrechten Ebenen eingeschlossen sind. Längs einer und derselben Röhre ist die Kraft umgekehrt proportional dem Inhalte der Schnitte, welche die Röhre auf den Niveauflächen bestimmt, und folglich umgekehrt proportional den Radien dieser zylindrischen Flächen. Die Kraft hat in einem Punkte der Fläche der inneren Belegung den Wert $f_1 = 4\pi\sigma$ und in einem Punkte P der zylindrischen Fläche mit dem Radius R den Wert

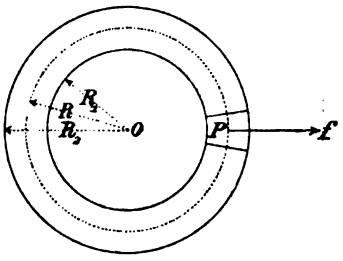

Fig. 39.

$$f = f_1 \frac{R_1}{R} = 4\pi\sigma \frac{R_1}{R}.$$

Auch in diesem Falle giebt die Gleichung (3) ein Mittel, die Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen zu berechnen; es ist:

$$V_2 - V_1 = 4\pi\sigma R_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = 4\pi\sigma R_1 \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Die Ladung auf der inneren Belegung ist

$$M = 2\pi R_1 l \sigma,$$

und daher ist die Kapazität des Kondensators:

$$C_0 = \frac{l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}. \tag{14}$$

Praktisch hat der eben ermittelte Ausdruck grosse Wichtigkeit, weil derselbe auf die Berechnung der Kapazität der unterseeischen und unterirdischen Kabel angewandt wird, welche als zylindrische Kondensatoren betrachtet werden können: wenn das Kabel einfach ist, so sind die beiden Belegungen von dem inneren Leiter und von dem äusseren metallischen Schutzmantel gebildet; wenn das Kabel konzentrisch ist, so bilden die beiden Leiter die Belegungen.

Betrachten wir auch hier den Grenzfall, in welchem der Abstand zwischen den Belegungen sehr klein ist. Wenn D dieser Abstand ist, so hat man:

$$R_2 = R_1 + D, \quad \log \frac{R_2}{R_1} = \log \left(1 + \frac{D}{R_1}\right);$$

wenn das Verhältnis $\frac{D}{R_1}$ so klein ist, dass in der Reihe des Logarithmus

die höheren Potenzen von $\frac{D}{R_1}$ schon von der zweiten ab vernachlässigt werden können, so kann man $\log \frac{R_2}{R_1} = \frac{D}{R_1}$ setzen, und folglich erhält man für die Kapazität den Ausdruck:

$$C_0 = \frac{l}{2\frac{D}{R_1}} = \frac{lR_1}{2D}$$

oder

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D},$$

wobei man mit $S = 2\pi R_1 l$ die Fläche des betrachteten Teiles der Belegung bezeichnet.

3. *Kondensatoren aus zwei parallelen Belegungen gebildet, von denen die eine eben, die andere zylindrisch ist.* Bezeichnen wir (Fig. 40) mit yy die Spur der Ebene, mit dem Kreise vom Zentrum C und vom Radius $CR = r$ diejenige des Zylinders auf der Zeichnungsebene; es sei d der Abstand der Achse des Zylinders von der Ebene yy. Für jede parallel zur Achse des Zylinders gemessene Längeneinheit sind auf den beiden Belegungen gleiche und entgegengesetzte Ladungen $+\lambda$ und $-\lambda$ vorhanden; die Ladung auf der Länge l einer der Belegungen ist $M = \lambda l$.

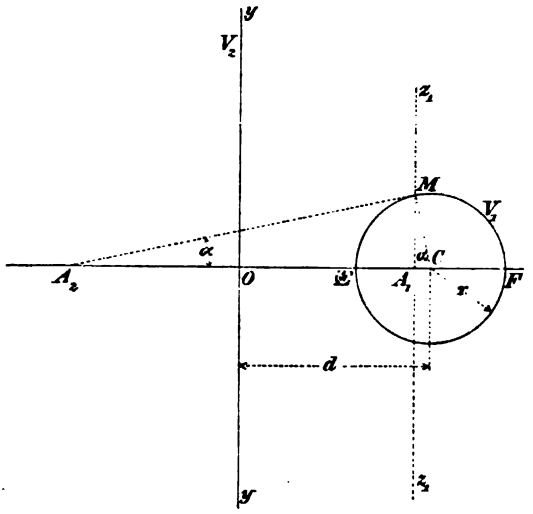

Fig. 40.

Betrachten wir das Feld, welches von zwei entgegengesetzt gleichen Verteilungen von der Dichte $+\lambda$ und $-\lambda$ auf zwei zur Achse des Zylinders parallelen Geraden erzeugt wird, deren Spuren A_1 und A_2 so liegen, dass die Ebene yy und die zylindrische Fläche Niveauflächen sind; d. h. [3], dass der Mittelpunkt O der Geraden A_1A_2 sich auf der Ebene yy befindet, und dass sich im Punkte M, welcher auf dem Kreisumfang von der in A_1 zu A_1A_2 Senkrechten z_1z_1 bestimmt wird, die beiden Geraden A_2M und CM unter rechtem Winkel schneiden. Im Raume zwischen

der Ebene und der zylindrischen Fläche ist dieses Feld gleich demjenigen, welches von den beiden Verteilungen auf den Belegungen des Kondensators erzeugt wird; es sind daher in beiden Feldern die Werte des Potentials V_2 auf der Ebene und V_1 auf dem Zylinder einander gleich, und folglich können wir dieselben durch die allgemeine Beziehung

$$V = \text{Konst} + 2\lambda \log \frac{r_2}{r_1}$$

berechnen, worin r_2 und r_1 die Entfernungen eines beliebigen Punktes der Fläche von den Punkten A_2 und A_1 bedeuten.

Für die Ebene hat man $r_2 = r_1$, also

$$V_2 = \text{Konst}.$$

Für die zylindrische Fläche hat man

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{A_2E}{A_1E} = \frac{A_2F}{A_1F} = \frac{A_2E + A_2F}{A_1E + A_1F} = \frac{A_2C}{r}.$$

Nun ist $A_2C = 2d - A_1C = 2d - r\sin\alpha$, wenn man mit α den Winkel $\widehat{A_1MC} = \widehat{CA_2M}$ bezeichnet.

Man hat also $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2d}{r} - \sin\alpha$, und folglich

$$V_1 = \text{Konst} + 2\lambda \log\left(\frac{2d}{r} - \sin\alpha\right).$$

Wir haben so den Wert der Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen des Kondensators

$$V_1 - V_2 = 2\lambda \log\left(\frac{2d}{r} - \sin\alpha\right)$$

und daher die Kapazität:

$$C_0 = \frac{M}{V_1 - V_2} = \frac{l}{2\log\left(\frac{2d}{r} - \sin\alpha\right)}.$$

Wenn der Radius r im Vergleiche mit dem Abstande d sehr klein ist, kann man dafür, abkürzend, setzen:

$$C_0 = \frac{l}{2\log\frac{2d}{r}}. \tag{15}$$

Eine Luftleitung in der Nähe der Erde bildet einen solchen Kondensator, dessen Belegungen der Leiter und die Erde sind. Diesen Fall kann man wie den obigen behandeln, und man wird, weil der Radius r des Leiters immer klein gegen dessen Entfernung d von der Erde ist, die Kapazität stets durch die Formel (15) ausdrücken können.

4. *Kondensatoren, gebildet aus zwei zylindrischen Belegungen mit parallelen Achsen.* — Die beiden Kreise von Zentrum C_1 und C_2 (Fig. 41)

stellen die Schnitte der beiden Zylinder dar, die beide den gleichen Radius r besitzen mögen; es sei $D = 2d$ der Abstand der beiden Achsen. Die senkrecht zu der Geraden $C_1 C_2$ durch ihren Mittelpunkt gelegte Ebene yy ist eine Niveaufläche; wenn wir dieselbe metallisch verkörpern, werden wir das Feld in keiner Weise verändern; wir können also das System der beiden zylindrischen Konduktoren durch den Komplex der

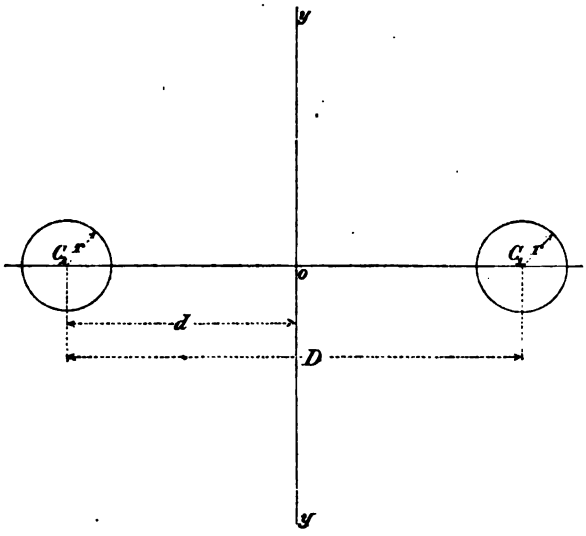

Fig. 41.

beiden Systeme ersetzen, deren eines von einem Konduktor und der Ebene yy, das andere von derselben Ebene und dem anderen Konduktor gebildet ist; die Kapazität von jedem dieser Systeme ist, wie wir im vorigen Abschnitte gesehen haben,

$$C_0 = \frac{l}{2 \log \left(\frac{2d}{r} - \sin \alpha \right)}$$

oder annäherungsweise

$$C_0 = \frac{l}{2 \log \frac{2d}{r}}.$$

Der betrachtete Kondensator ist dem System der beiden hintereinandergeschalteten Kondensatoren gleichwertig; seine Kapazität ist also gleich der Hälfte derjenigen eines von beiden, nämlich

$$C_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2 \log \frac{2d}{r}}$$

oder:

$$C_0 = \frac{l}{4 \log \frac{D}{r}}. \tag{16}$$

Die parallelen Hin- und Rückleiter einer elektrischen Leitung verwirklichen in der Praxis den betrachteten Fall. Der Radius r der beiden Leiter ist immer sehr klein im Vergleiche zu ihrer Entfernung D; man wird daher die Formel (16) bei der Berechnung der Kapazität solcher Leitungen anwenden können.

5. *Ebene Kondensatoren.* Die Kapazität eines Flächenteiles vom Inhalt S eines ebenen Kondensators, in welchem die Belegungen einen Abstand D besitzen, ist, wie wir gesehen haben [44]:

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D}. \tag{17}$$

Für den Plattenkondensator ist der Ausdruck der Kapazität, welcher für den sphärischen und für den zylindrischen, mit sehr dünnem Dielektrikum versehenen Kondensator nur angenähert zutreffend ist, streng richtig. Darüber können wir uns leicht Rechenschaft geben, indem wir beachten, dass eigentlich die Voraussetzung eines unendlich dünnen Dielektrikums so viel heisst, als sich die Kondensatoren aus vielen kleinen, ebenen Kondensatoren gebildet zu denken.

In einem Kondensator kann man einen Teil einer der Belegungen beweglich machen und die stets nach dem Inneren des Kondensators gerichtete Kraft messen, welche das elektrische Feld auf denselben ausübt. Die Kraft auf die Flächeneinheit ist nichts anderes als der elektrostatische Druck p.

Wenn man nun bedenkt, dass

$$p = 2\pi\sigma^2, \quad \sigma = \frac{f}{4\pi} \quad \text{und} \quad f = \frac{V_1 - V_2}{D},$$

so hat man

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{D}\right)^2.$$

Auf einem Teil vom Flächeninhalte S ist also die Kraft:

$$F = pS = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{D}\right)^2.$$

Aus dieser Beziehung kann man den Wert der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ als Funktion der Kraft F, des Flächeninhaltes S und des Abstandes D ermitteln:

$$V_1 - V_2 = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}. \tag{18}$$

Es ist hier zweckmässig, daran zu erinnern, dass die Differenz $V_1 - V_2$ sich in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt ergiebt. Die Thatsache, dass D, S und F durch einfache geometrische und mechanische Messungen bestimmt werden, beweist die Möglichkeit, *absolute**) Messungen von Potentialdifferenzen auszuführen.

Auf diesem Prinzip beruht das *absolute Elektrometer* von Lord Kelvin.

§ 2.

Elektrischer Strom.

47. Elektrisierung durch Kontakt. — In einem elektrischen Felde hat jedes Volumenelement des Dielektrikums eine gewisse Energiemenge in sich aufgespeichert, deren Wert von den Werten der Kraft und der elektrischen Verschiebung in dem betrachteten Element abhängt.

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muss, wenn das Feld entsteht, notwendig eine äussere Kraft wirken, welche eine Arbeit verrichtet, um die vom Dielektrikum der Verschiebung entgegengesetzten Gegenwirkungen zu überwinden. Wir wissen nicht, welcher Art thatsächlich die Vorgänge beim Erzeugen der Verschiebung sind; dies ist aber sicher, dass, um sie hervorzubringen, eine äussere Kraft notwendig ist; der Arbeit dieser Kraft verdankt man die im Felde aufgespeicherte Energie.

Untersuchen wir die wichtigsten Fälle, in welchen durch eine äussere Kraft ein elektrisches Feld erzeugt wird.

Es ist ein allgemeines, von Volta entdecktes Gesetz, dass zwischen zwei beliebigen, in Berührung mit einander gebrachten Körpern von verschiedener Materie eine Potentialdifferenz entsteht; durch die Berührungsfläche beider Körper hindurch findet nämlich eine elektrische Verschiebung statt, infolge deren sich der eine mit negativer, der andere mit positiver Elektrizität geladen ergiebt. Man kann auch die Elektrisierung durch Reibung als einen besonderen Fall von Elektrisierung durch Kontakt ansehen.

Die Verschiebung wird notwendigerweise durch einen Aufwand an Arbeit erzeugt; man kann sich diese Arbeit von intermolekularen oder interatomischen Kräften geleistet denken, welche an der Trennungsfläche in der Richtung der Verschiebung, d. h. vom negativen zum positiven Körper wirken.

Die Grösse der Verschiebung hängt von der Grösse dieser Kräfte ab. Es ist richtig, dass die Erscheinung, wie Volta behauptete, bei der ein-

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

fachen Berührung zwischen zwei verschiedenen Metallen auftritt, unter welchen keine chemischen Reaktionen stattfinden und nur molekulare Kräfte von Adhäsion und Kohäsion wirken; aber die Potendialdifferenz, die unter ihnen entsteht, ist sehr klein, viel kleiner als Volta vermutete.

Der Wert der Verschiebung nimmt zu, wenn unter den beiden Körpern interatomische Kräfte von chemischer Affinität im Spiel sind. So entsteht bei dem Kontakt Metall-Luft eine viel grössere Potentialdifferenz als bei dem einfachen Kontakt zwischen zwei Metallen. Das Metall ladet sich in Kontakt mit der Luft mit negativer Elektrizität, es nimmt ein kleineres Potential an; die Potentialdifferenz ist um so grösser, je leichter sich das Metall oxydiert. Für die genaue Auffassung der klassischen Versuche Voltas muss man nicht nur die Wirkungen zwischen den beiden Metallen, sondern auch die Wirkungen zwischen jedem von ihnen und der Luft in Betracht ziehen; Volta schrieb der Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallen einen grösseren als den thatsächlichen Wert zu, gerade deswegen, weil er die Kontakte Metall-Luft vernachlässigte.

Erwähnen wir die von Lord Kelvin angewandte Anordnung, um das Grundexperiment Voltas zu wiederholen, und die Erklärung, die er davon giebt.

Zwei zum Halbkreis gebogene Stäbe, wovon der eine aus Kupfer, der andere aus Zink besteht, sind an einem Ende M (Fig. 42), in Berührung gehalten oder zusammengelötet; die anderen Enden liegen einander gegenüber und lassen zwischen sich einen Raum, in dem sich ein um die Achse O leicht drehbares Blättchen A befindet. Wenn man dem Blättchen A eine starke positive Ladung erteilt, dreht es sich um einen kleinen Winkel, so dass es sich vom Zink entfernt und dem Kupfer nähert; man hat also in diesem Raum ein vom Zink zum Kupfer gerichtetes Feld.

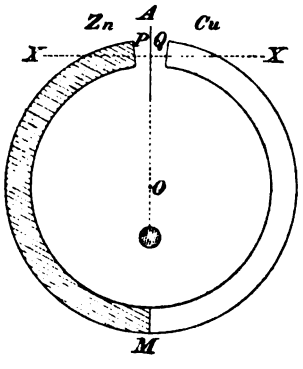

Fig. 42.

Betrachten wir eine zum Blättchen A senkrechte Gerade XX; sie schneidet in P und Q die Flächen, welche Zink und Kupfer begrenzen.

Konstruieren wir das Diagramm der Potentiale (Fig. 43), indem wir senkrecht zu der Geraden XX in jedem ihrer Punkte als Ordinate den entsprechenden Wert des Potentials auftragen. Das Zink und das Kupfer in Berührung mit der Luft elektrisieren sich beide negativ, und da der Einfluss des Kontaktes Kupfer-Zink, wie gesagt, sehr klein ist, nehmen

sie negative, merklich gleiche Potentiale V_{Zn}, V_{Cu} an. Die Luft nimmt in den Punkten, die dem Zink und Kupfer nahe sind, die positiven Potentiale V_1 bezw. V_2 an, und es ist, weil das Zink leichter als das Kupfer oxydiert, $V_1 > V_2$. In der Luft sinkt das Potential allmählich vom Punkte P zum Punkte Q. Das Auftreten eines elektrischen Feldes zwischen Zink und Kupfer ist also wesentlich der verschieden starken Einwirkung der Luft auf die beiden Metalle zu verdanken.

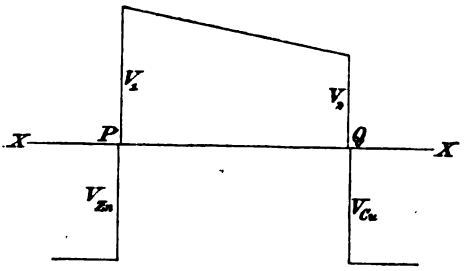

Fig. 43.

48. Hydroelektrisches Element. — Die Potentialdifferenz, welche bei der Berührung von Körpern aus verschiedener Materie entsteht, ist viel grösser, wenn unter den Körpern nicht ein Vorgang, wie der einer langsamen Oxydation an der Luft, sondern eine kräftigere chemische Reaktion auftritt, wie z. B. diejenige zwischen einem Metall und einer dasselbe stark angreifenden Säure; das Metall ladet sich immer negativ; sein Potential ist um so kleiner, je mehr es von der Säure angegriffen wird.

Betrachten wir eine in (z. B. mit Schwefelsäure) angesäuertes Wasser getauchte Zinkplatte (Fig. 44). Um leichter in der Luft experimentieren zu können, tauchen wir in die Flüssigkeit eine von ihr weniger angreifbare zweite Metallplatte, z. B. eine Kupferplatte ein, und verlängern wir die beiden Platten in der Luft durch zwei Leiter A und B aus Kupfer (*Rheophoren*), um den Einfluss der Kontakte der Luft mit den beiden verschiedenen Metallen zu vermeiden. Wir werden in dem mit der Kupferplatte verbundenen Leiter B ein grösseres Potential als in dem mit dem Zink verbundenen Leiter A wahrnehmen. Die Differenz dieser beiden Potentiale ist die algebraische Summe der in den verschiedenen Kontakten vorhandenen Potentialdifferenzen. Und zwar hat die Flüssigkeit, welche ein homogener Konduktor ist, in jedem ihrer Punkte dasselbe Potential; beide Platten in Berührung mit der Flüssigkeit nehmen ein kleineres Potential als die Flüssigkeit an, ein erheblich kleineres jedoch

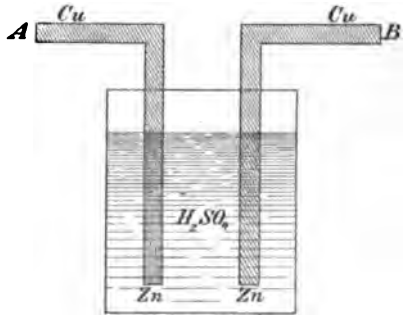

Fig. 44.

die Zinkplatte, da sie von der Säure sehr stark angegriffen wird; es folgt daher, dass das Zink ein kleineres Potential als das Kupfer besitzt. Zwischen den beiden Konduktoren B und A existiert ein elektrisches Feld; die in ihm aufgespeicherte Energie ist das Äquivalent der von den Kräften chemischer Affinität zur Erzeugung des Feldes verrichteten Arbeit.

Diese Zusammenstellung verschiedenartiger Konduktoren, welche, wegen besonderer chemischer Wirkungen, auf verschiedenen Potentialen gehalten werden, bildet in seiner einfachsten Gestalt ein *hydroelektrisches* oder *Volta'sches Element.*

49. Thermoelektrisches Element. — Wenn man in einem System von Konduktoren aus verschiedener Materie die Berührungsstellen der einzelnen das System bildenden Elemente auf verschiedenen Temperaturen hält, so entsteht an den Berührungsstellen eine elektrische Potentialdifferenz, deren Grösse von der Höhe der Temperatur abhängig ist.

Um diese Thatsache zu konstatieren, betrachten wir ein solches System von Konduktoren, bei welchem in normalem Zustande die Wirkungen der verschiedenen Kontakte die gleichen und entgegengesetzten sind, und zwischen dessen Enden keine Potentialdifferenz vorhanden ist. Es bestehe z. B. ein Stab aus drei aneinander gelöteten Konduktoren (Fig. 45); die beiden Endstücke A und B seien aus demselben, das mittlere C aus einem anderen Metalle. In normalem Zustande findet man zwischen A und B keine Potentialdifferenz, weil die Wirkung der beiden Kontakte zwischen C und A, A und der Luft, von der gleichen und entgegengesetzten Wirkung der Kontakte zwischen C und B, B und der Luft, aufgehoben wird; wenn man aber die beiden Lötstellen dauernd auf verschiedenen Temperaturen t_1 und t_2 hält, so wird die Wirkung der beiden Kontakte 1 und 2 verschieden, und man wird zwischen A und B eine Potentialdifferenz wahrnehmen, deren Wert und Vorzeichen von der Natur der Körper und von der Differenz der Temperaturen an den beiden Lötstellen abhängt.

Fig. 45.

Das betrachtete System bildet in seiner einfachsten Gestalt ein *thermoelektrisches Element,* dessen Prinzip von Seebeck entdeckt wurde.

50. Konduktoren, die sich in magnetischem Felde bewegen. — In den erwähnten Fällen entsteht die Potentialdifferenz durch die Berührung zweier verschiedener Körper in den Berührungsflächen selbst, scheinbar sprungweise den Übergang von einem Potentiale zum andern nehmend; wahrscheinlich spielt sich der physikalische Vorgang allerdings

so ab, dass die Änderung des Potentials kontinuierlich geschieht, jedoch in einem so kleinen Raum, dass wir es nicht wahrnehmen können.

In anderen Fällen dagegen geschieht die Änderung des Potentials kontinuierlich längs eines ausgedehnten Teiles des Konduktors; die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Konduktors ist die algebraische Summe der Differenzen, die in den einzelnen Elementen des betreffenden Konduktors vorhanden sind. Dies ist der Fall bei Leitern, die sich in magnetischen Feldern bewegen.

51. Elektromotorische Kraft. — Volta, welchem der Begriff des elektrischen Potentials noch nicht bekannt war, bezeichnete die Erscheinung der Elektrisierung durch Kontakt dadurch, dass er sagte, zwei sich berührende Körper besitzen verschiedene elektrische Spannungen; der Spannungsdifferenz gab er den Namen *Elektromotorische Kraft.* Diese Benennung, obwohl nicht sehr geeignet, wird auch heute noch angewandt, aber in ihrer Definition ersetzt man den unbestimmten Begriff der elektrischen Spannung durch den mathematisch und physikalisch gut definierten Begriff Potential.

Wenn zwischen zwei Punkten A und B eines und desselben Konduktors oder einer Reihe von miteinander verbundenen Konduktoren in dem elektrischen Gleichgewichtszustande eine Potentialdifferenz vorhanden ist, so sagt man, dass zwischen den beiden Punkten eine elektromotorische Kraft existiert, deren Wert gleich dem Werte der Potentialdifferenz ist

$$e = V_B - V_A,$$

*und deren positive Richtung vom Punkte A zum Punkte B, also von Stellen kleineren zu Stellen grösseren Potentials führt.**)

Die elektromotorische Kraft zwischen zwei Punkten eines Konduktors ist die algebraische Summe der E. M. KK., die zwischen diesen Punkten vorhanden sind, d. h. ist die Summe der Potentialdifferenzen, welche infolge einer der betrachteten Ursachen in der Aufeinanderfolge der die beiden Punkte verbindenden Konduktoren entstehen. So hat man in dem einfachen Volta-Element eine vom Zink zum Kupfer gerichtete E. M. K., die gleich der Differenz der entgegengesetzten E. M. KK. ist, die an den Trennungsflächen zwischen Flüssigkeit und Platten vorhanden sind.

Aus der Definition selbst ergiebt sich, dass eine E. M. K. eine Grösse von der Art der Potentiale, d. h. ein Kräfteintegral längs einer Linie, und keineswegs eine Kraft im eigentlichen Sinne dieses Wortes ist, weder

*) Wir werden allgemein die Abkürzung E. M. K. (in der Mehrzahl E. M. KK.) verwenden, um die elektromotorische Kraft zu bezeichnen.

eine mechanische noch eine elektrische. Dies muss man wohl im Auge behalten, wenn man auch jene ungeeignete Benennung weiter verwendet, die von Volta in Zeiten, in welchen man mit dem Worte Kraft grossen Missbrauch trieb, eingeführt wurde.

Weil die E. M. K. e zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 46) durch die Potentialdifferenz zwischen diesen beiden Punkten definiert ist, so kann man ihr immer folgenden Ausdruck geben:

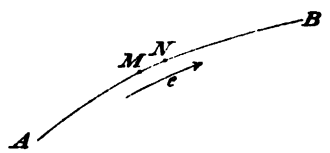

Fig. 46.

$$e = \int_{AB} \eta_s ds,$$

worin $\eta_s ds$ die E. M. K. auf einem Element MN einer die beiden Punkte verbindenden Linie AB, d. h. die Potentialdifferenz zwischen den beiden unendlich nahen Punkten M und N bedeutet. In diesem Ausdrucke ist η eine Grösse derselben Art wie die elektrischen Kräfte, und für sie wäre die Bezeichnung E. M. K. geeignet. Doch ist der Brauch, diesen Namen der Grösse e zu geben, so allgemein, dass wir, um keinen Irrtum hervorzurufen, η die *auf die Längeneinheit bezogene E. M. K.* nennen werden.

Wir haben schon erwähnt, dass es, um eine elektrische Verschiebung hervorzubringen, notwendig ist, eine Arbeit zu verrichten, welche von äusseren Kräften geleistet wird; diese Kräfte sind eben durch die Kräfte η dargestellt, welche nur dort wirken, wo eine Ursache für eine elektrische Verschiebung vorhanden ist.

Es ist notwendig, auf den Unterschied zu achten, der zwischen den Kräften η und den elektrischen Kräften f besteht. Betrachten wir eine Flussröhre, längs welcher, wie wir wissen, die Verschiebung solenoidisch stattfindet; die Kraft η hat ihren Sitz nur dort, wo die speziellen, in den vorigen Abschnitten erwähnten Bedingungen erfüllt sind; die elektrische Kraft f ist in dem ganzen Teile der Röhre, der das Dielektrikum durchsetzt, vorhanden und giebt eben das Mass der elastischen Gegenwirkung, welche das Dielektrikum der Verschiebung entgegensetzt; in den Stellen dagegen, wo die Röhre durch die Konduktoren hindurchgeht, existieren diese Gegenwirkungen nicht.

Ein Vergleich aus der Mechanik wird die Deutung der Erscheinung erleichtern. Man denke sich einen starren Ring durch viele elastische Schnüre im Gleichgewicht erhalten. Eine in einem Punkte des Ringes durch eine Kraft F erzeugte Verschiebung wird sich auf den ganzen Ring übertragen; dieser Verschiebung setzen die Schnüre elastische Reaktionen entgegen. Die Kraft F ist den E. M. KK. η vergleichbar, während die Gegenwirkungen der Schnüre die elektrischen Kräfte im Dielektrikum darstellen.

52. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. — In den früher betrachteten Feldern war die Gleichgewichtsbedingung die, dass alle Punkte eines und desselben Konduktors oder mehrerer sich berührenden Konduktoren dasselbe Potential hätten; in den zuletzt betrachteten Fällen dagegen müssen, damit Gleichgewicht besteht, in verschiedenen Punkten eines und desselben Konduktors verschiedene Potentiale herrschen. Und gerade, wenn zwischen zwei Punkten eines Konduktors eine E. M. K. vorhanden ist, so ist es für das Bestehen des Gleichgewichts notwendig, dass der Zustand der übrigen Teile des Feldes die Existenz einer Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten gestattet, welche gleich der E. M. K. ist. Wenn nämlich zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 46) eine E. M. K. e vorhanden ist, so muss für den Gleichgewichtszustand die Bedingung erfüllt sein

$$e = V_B - V_A,$$

welche uns zur Charakterisierung des Begriffs der E. M. K. diente.

Auf der Linie AB betrachten wir zwei in verschwindend kleiner Entfernung von einander gelegene Punkte M und N, zwischen welchen eine von M nach N gerichtete E. M. K. $\eta_s ds$ vorhanden ist. Bezeichnet V das Potential in M, so ist $V + dV$ der Wert des Potentials in N; für den Gleichgewichtszustand muss sein:

$$\eta_s ds = V_N - V_M = dV,$$

woraus

$$\eta_s = \frac{dV}{ds},$$

wobei η_s und dV dasselbe Vorzeichen haben; das Potential nimmt in der Richtung der Kraft η zu.

Die Thatsache, dass das Potential in diesem Falle von Punkt zu Punkt des Konduktors variiert, weist darauf hin, dass die elektrische Kraft im Innern des Konduktors selbst nicht Null ist, sondern in jedem seiner Punkte den Wert f besitzt, welcher durch die Beziehung

$$f_s = -\frac{dV}{ds}$$

definiert ist.

Damit das Feld im Gleichgewichtszustande sei, ist es also notwendig, dass in jedem Punkte und nach jeder Richtung die Bedingung

$$\eta_s = -f_s$$

oder, anders ausgedrückt:

$$F_s = \eta_s + f_s = 0$$

erfüllt wird, wobei man mit F den aus den beiden homogenen Vektoren η und f resultierenden Vektor bezeichnet.

Im Gleichgewichtszustande ist also in jedem Punkte des Konduktors die Resultierende der elektrischen Kraft f und der auf die Längeneinheit bezogenen E. M. K. η gleich Null.

In dem speziellen Falle, in welchem $\eta = 0$ ist, hat man auch $f = 0$ und folglich

$$V = \text{Konst.};$$

wir finden die bekannte Gleichgewichtsbedingung eines Feldes wieder, in dem keine E. M. KK. vorhanden sind.

Im Innern der Konduktoren treten im Gleichgewichtszustande elektrische Kräfte nur auf, wenn in ihnen E. M. KK. vorhanden sind; wenn aber keine E. M. K. existiert, ist notwendigerweise die elektrische Kraft auch gleich Null, weil diese in einem Konduktor, in welchem sich keine elastischen Reaktionen entwickeln, nicht von einer gleichen und entgegengesetzten Kraft im Gleichgewichte gehalten werden kann.

Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Vektorgrösse η im Innern der Konduktoren so verteilt ist, dass sie ein monodromes oder ein polydromes Potential besitzt.

Setzen wir zuerst voraus, dass η ein einwertiges Potential besitzt. Dies bedeutet, dass das Integral der Kraft η längs einer beliebigen Linie zwischen den beiden Punkten A und B (Fig. 47) konstant ist, d. h. dass das Integral längs einer beliebigen, geschlossenen, die beiden Punkte enthaltenden Linie $AMBNA$ gleich Null ist.

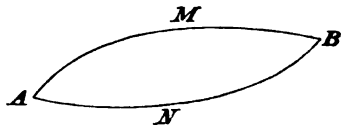

Fig. 47.

Wenn wir mit U das Potential von η bezeichnen, so haben wir nach der Definition

$$\eta_s = -\frac{dU}{ds},$$

und folglich, wenn man dies in die Gleichgewichtsgleichung einsetzt:

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{ds}; \quad \frac{d(U+V)}{ds} = 0; \quad U + V = \text{Konst.}; \quad V = -U + \text{Konst.}$$

Für das Bestehen des Gleichgewichts ist es also nötig, dass in jedem Punkte das von der freien Elektrizität hervorgebrachte Potential V nur um eine Konstante von dem Werte des von den E. M. KK. herrührenden Potentials differiert und ferner, dass es das diesem entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Es existiert nun für jeden Wert von U immer eine Elektrizitätsverteilung, für welche diese Bedingung erfüllt werden kann. Wenn dies in einem gewissen Augenblicke nicht geschieht, so ist das Gleichgewicht nicht möglich, und man hat folglich eine Änderung der Verschiebung, durch welche eine Elektrizitätsverteilung hervorgebracht wird, die das Gleichgewicht herstellt. Jeder Änderung der Verteilung der

auf die Längeneinheit bezogenen E. M. KK. η, deren Potential monodrom ist, entspricht eine Änderung der Verteilung der Elektrizität, durch welche das Gleichgewicht wieder hergestellt wird.

Betrachten wir ein besonderes Beispiel. Es seien in einem Kondensator die Belegungen A und B (Fig. 48) anfänglich durch einen Draht aus demselben Metall verbunden, so dass das Ganze einen homogenen Konduktor bildet, in dessen sämtlichen Punkten $\eta = 0$ ist.

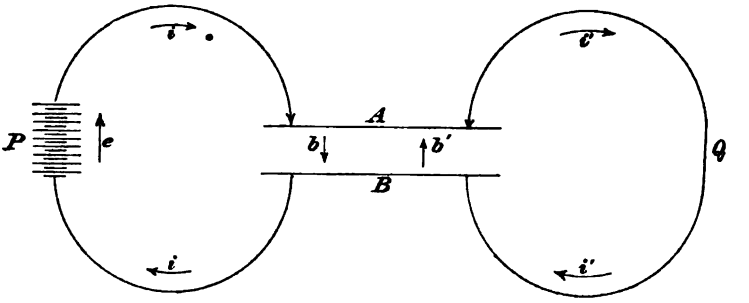

Fig. 48.

In diesem Falle besitzen die Kräfte η ein einwertiges Potential $U =$ Konst.; für den Gleichgewichtszustand ist es nötig, dass auch $V =$ Konst. sei, d. h.

$$V_A = V_B,$$

wenn man mit V_A und V_B die Werte des Potentials auf den Belegungen bezeichnet.

Wenn man die Verbindung der beiden Belegungen durch den Draht Q unterbricht und dieselbe durch einen ein Element oder allgemein eine konstante E. M. K. e enthaltenden Schliessungskreis P ersetzt, so hat man noch den Fall eines Konduktors, in dem der Vektor η ein einwertiges Potential besitzt, da die Potentialdifferenz zwischen den beiden Polen des Elements oder der Batterie konstant und gleich e ist. In diesem Falle ist, wenn die Belegungen A und B bezw. mit dem positiven und negativen Pol des Elementes oder der Batterie verbunden sind, die Gleichgewichtsbedingung

$$V_A - V_B = e.$$

Da man ursprünglich $V_A = V_B$ hatte, ist in dem Moment, in welchem man die Verbindung durch den Schliessungskreis P herstellt, der Gleichgewichtszustand nicht mehr möglich; es muss also durch das Dielektrikum des Kondensators eine Verschiebung von A nach B in der Richtung b stattfinden, so dass zwischen A und B die gegebene Potentialdifferenz hergestellt wird. Diese Verschiebung, die, wie wir wissen, solenoidisch

ist, findet nicht nur im Dielektrikum, sondern auch durch den Schliessungskreis P statt und geschieht eben infolge des Vorhandenseins der E. M. K. e. Wenn der Kondensator geladen ist, d. h. wenn man $e = V_A - V_B$ hat, halten die Gegenwirkungen des Dielektrikums der E. M. K. das Gleichgewicht, und es ist keine Verschiebung mehr möglich; wir haben also einen Zustand stabilen Gleichgewichtes.

Wenn man die Verbindung durch den Schliessungskreis P aufhebt und jene durch den Draht Q wiederherstellt, so wird das Gleichgewicht gestört, und durch das Dielektrikum findet eine Verschiebung in der umgekehrten Richtung b' statt, wodurch wieder die Gleichgewichtsbedingung

$$V_A = V_B$$

hergestellt wird.

In der That wird mit dem Aufhören der E. M. K. e notwendigerweise das Gleichgewicht im Dielektrikum gestört, weil, während die von den Deformationen hervorgebrachten, elastischen Gegenwirkungen bestehen geblieben sind, die sie erzeugenden Kräfte aufgehört haben. Die jetzt frei wirkenden elastischen Reaktionen werden die Deformationen des Mediums vernichten, indem sie durch das Dielektrikum eine Verschiebung (der vorigen entgegengesetzt von B nach A gerichtet) hervorbringen, welche, weil solenoidisch, sich durch den Konduktor hindurch fortsetzt und ausgleicht. Darin besteht die Entladung des Kondensators.

Wenn wir auf diesen Fall die Analogie mit den elastischen Körpern ausdehnen, die wir schon mehrmals angewendet haben, können wir einen geladenen Kondensator mit einem deformierten elastischen Körper, die E. M. K. mit der deformierenden Kraft, die elektrische Verschiebung mit der Deformation, die elektrische Kraft mit der elastischen Gegenwirkung vergleichen. Wie in dem elastischen Körper für einen gegebenen Wert der Kraft die Deformation einen bestimmten Wert annimmt, welchem das Gleichgewicht zwischen der deformierenden Kraft und der elastischen Gegenwirkung entspricht, so hat man auch im Kondensator für einen gegebenen Wert der E. M. K. einen bestimmten Wert der Verschiebung; in beiden Fällen vernichten die Gegenwirkungen die eingetretenen Deformationen beim Verschwinden der deformierenden Kraft und stellen den früheren Zustand wieder her.

53. Elektrischer Strom. — Denken wir uns, dass die Kraft η ein polydromes Potential besitzt, d. h. dass das Integral $\int_M \eta_s ds$ längs einer beliebigen Linie zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 47) nicht nur eine Funktion der Lage der beiden Punkte A und B sei, sondern dass es mit dem Variieren der Linie M selbst variiere.

Für das Gleichgewicht muss in jedem Punkte die Beziehung

$$\eta_s = -f_s$$

erfüllt werden.

Nun hat die elektrische Kraft f, welche ihr Dasein Newton'schen Massen verdankt, in jedem Punkte ein einwertiges Potential; nicht so verhält sich die Kraft η; es ist daher nicht möglich die Verteilungen der beiden Kräfte η und f einander gleich zu machen und das Gleichgewicht durch einfache Änderungen der Verschiebung herzustellen. Wir können uns von dem, was in diesem Falle geschehen muss, eine Vorstellung machen, indem wir das Beispiel des Kondensators wieder benützen, welchen wir im vorigen Falle betrachteten.

Es seien wieder A und B (Fig. 48) die beiden Belegungen eines Kondensators, welche man ebenso durch einen einfachen Konduktor Q, wie durch einen eine E. M. K. e enthaltenden Konduktor P verbinden kann.

Stellen wir uns vor, dass die beiden Verbindungen zur gleichen Zeit hergestellt werden; wir haben dann einen einzigen Konduktor, der einen geschlossenen Kreis bildet. Für den Konduktor P, welcher die E. M. K. enthält, gilt $\int_P \eta_s ds = e$, für den Konduktor Q dagegen $\int_Q \eta_s ds = 0$; man hat also für das auf den ganzen Schliessungskreis ausgedehnte Integral:

$$\int_{PQ} \eta_s ds = e.$$

Wenn der Schliessungskreis bei der Integration $2, 3, \cdots$ mal durchlaufen wird, so ist der Wert des Potentials $2e, 3e, \cdots$, d. h. die Kraft η besitzt ein polydromes Potential. Hier ist das Gleichgewicht nicht mehr möglich, weil die Bedingungen in Bezug auf die beiden Schliessungskreise P und Q, nämlich $V_A - V_B = e$ und $V_A - V_B = 0$, gleichzeitig nicht erfüllt werden können.

Wegen dieses Fehlens des Gleichgewichts haben wir eine neue Erscheinung vor uns; um sie zu studieren, denken wir uns die beiden Verbindungen abwechselnd sehr schnell nacheinander hergestellt und wieder aufgehoben, anstatt wie vorher gleichzeitig hergestellt. Wenn wir hierbei die Zeitintervalle zwischen den einzelnen auszuführenden Handlungen verschwindend klein annehmen, so geht der jetzt angenommene Fall in den zuerst betrachteten Fall, wo beide Verbindungen dauernd bestehen, über.

Denken wir uns also, wir öffnen den Kreis Q und schliessen den Kreis P; der Kondensator ladet sich, bis seine Belegungen eine Potentialdifferenz gleich e annehmen; es findet daher eine Verschiebung statt, welche im Dielektrikum die Richtung b und im Kreise die Richtung i besitzt. Wenn wir dagegen P öffnen und Q schliessen, entladet sich der

Kondensator und bringt eine Verschiebung hervor, welche im Dielektrikum die zu b entgegengesetzte Richtung b', und im Kreise Q die Richtung i' besitzt. Die beiden Verschiebungen b und b', deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben, sind gleich, und da die Verschiebung solenoidisch ist, so sind auch die beiden i und i' einander gleich, deren Richtungen in dem Kreise $APBQA$ übereinstimmen; somit können wir sagen, dass eine und dieselbe Elektrizitätsmenge diesen gesamten Kreis durchflossen hat. Dies findet bei jedem Schliessen und Öffnen der beiden Verbindungen statt; man wird also als den Grenzwert für den Fall, dass die beiden Verbindungen gleichzeitig hergestellt sind, in dem geschlossenen, metallischen Kreise $APBQA$ einen kontinuierlichen Durchgang von Elektrizität in der Richtung ii' wahrnehmen. Der Solenoidität wegen ist der Wert der Verschiebung in einem bestimmten Moment in jedem Querschnitte des Konduktors derselbe und bleibt unverändert, solange die E. M. K. nicht variiert. Im Dielektrikum dagegen hat man entgegengerichtete Verschiebungen, der Ladung und Entladung des Kondensators entsprechend, solange das Öffnen und Schliessen der Kreise langsam vor sich geht; aber wenn das Öffnen und Schliessen einander sehr rasch folgen, und noch mehr, wenn man den Grenzfall betrachtet, in dem die beiden Kreise geschlossen sind, so hat der Kondensator keine Zeit mehr, sich zu laden und zu entladen, die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen und folglich die Verschiebung im Dielektrikum nimmt einen bestimmten Wert an, welcher so lange konstant bleibt, als die E. M. K. und die anderen Zustände des Kreises unverändert bleiben.

Das für den besonderen, vorher betrachteten Kreis Gesagte kann ohne Weiteres auf jeden geschlossenen, metallischen, eine E. M. K. enthaltenden Kreis ausgedehnt werden. Nur wenn man den Kreis schliesst oder öffnet oder allgemein, wenn die E. M. K. variiert, findet eine Verschiebung im Dielektrikum statt, und ändert sich die Verteilung des Potentials; nachher bleibt diese Verteilung konstant, und es finden Änderungen im Dielektrikum nicht mehr statt; nur im Innern der Konduktoren geht eine stetige und konstante Verschiebung vor sich.

Eine mit der Zeit veränderliche Verschiebung kann in den Konduktoren und in dem Dielektrikum hervorgebracht werden; eine kontinuierliche Verschiebung kann nur in einem vollständig metallischen Kreise, d. h. in einem elastischen Spannungen vergleichbare Gegenwirkungen nicht bietenden Kreise stattfinden.

Eine solche kontinuierliche elektrische Verschiebung in den Konduktoren nennt man *elektrischen Strom*. Man nennt *Richtung des Stromes* diejenige der Verschiebung, d. h. diejenige, nach welcher sich die positiven Elektrizitätsmengen verschieben.

Der elektrische Strom ist eigentlich eine Erscheinung derselben Art, wie diejenigen, welche bei der Ladung und Entladung der Kondensatoren auftreten. Man hat in diesen Fällen einen *Momentanstrom* oder *Stromstoss*, welcher wegen der Gegenwirkungen des Dielektrikums aufhört, wenn das Gleichgewicht eingetreten ist. Wenn dagegen der Kreis vollständig metallisch ist und eine konstante E. M. K. enthält, so ist die Herstellung eines Gleichgewichts dauernd unmöglich; in dem ganzen Kreise findet eine konstante Verschiebung (*Gleichstrom*) statt; nach einer sehr kurzen Anfangszeit stellt sich ein Beharrungszustand her, bei welchem die Werte der Potentialdifferenzen und der Verschiebungen an jeder Stelle konstant bleiben.

Betrachten wir einen von elektrischem Strome durchflossenen Schliessungskreis; in einem seiner Punkte P sei i die Richtung des Stromes und dS der Flächeninhalt eines zu i senkrechten Flächenelementes.

Man nennt *Intensität des Stromes* oder *Stromstärke durch das Element* dS die Elektrizitätsmenge dm, die in der Zeiteinheit durch das Element hindurchgeht. Das Verhältnis

$$u = \frac{dm}{dS}$$

wird die *Stromdichte im Punkte* P genannt.

Diese Dichte ist eine Vektorgrösse, die in jedem Punkte die Richtung des Stromes hat; ihr Fluss durch eine beliebige Fläche S

$$i = \int_S u dS$$

drückt die Elektrizitätsmenge aus, welche in der Zeiteinheit durch die Fläche S hindurchgeht, und heisst *Intensität des Stromes durch die Fläche S.*

Weil die Verschiebung solenoidische Verteilung besitzt, so ist auch die Stromdichte u, welche die auf die Zeiteinheit bezogene Grösse der Verschiebung ausdrückt, solenoidisch verteilt. Wenn es sich um einen Gleichstrom handelt, so verlaufen sämtliche Flussröhren innerhalb des metallischen Kreises, und es hat der Fluss des Vektors u, d. h. die Stromintensität in einer bestimmten Zeit denselben Wert durch jeden Querschnitt des Stromkreises; ferner, da in jedem Punkte die Verschiebung und die Dichte konstant bleiben, so bleibt auch die Stromstärke im Kreise konstant.

Wenn man dagegen einen Stromstoss betrachtet, so finden wir, dass sich dessen Wirkungen auch in das Dielektrikum hinein erstrecken, und folglich variiert die Stromstärke durch einen gegebenen Schnitt mit der Zeit und in einem gegebenen Moment von Schnitt zu Schnitt des Konduktors.

54. Ohm'sches Gesetz. — Beschränken wir uns zunächst auf das Studium der elektrischen Gleichströme in stationärem Strömungszustande. Wenn in jedem Punkte der Wert und die Richtung der elektrischen Dichte u und der Resultierenden F der Kräfte η und f bekannt sind, wird man leicht alle anderen Grössen, z. B. die Stromstärken, die E. M. KK., die Potentialdifferenzen ermitteln können. Die allgemeine Aufgabe bei der Behandlung der Gleichströme reduziert sich darauf, dass man in jedem Punkte die Beziehung zwischen der Dichte u und der Kraft F ermittelt. Wir haben schon gesehen, dass, wenn $F = 0$ ist, elektrisches Gleichgewicht besteht und folglich auch $u = 0$ ist; ferner ist es natürlich, dass die Grösse u, die durch das Wirken der Kraft F hervorgebracht wird, eine Funktion letzterer Grösse ist; aber die Art ihrer Abhängigkeit kennen wir noch nicht, und wir werden uns deshalb zur Ermittelung dieses Abhängigkeitsverhältnisses auf Versuche zu stützen haben. Eigentlich ergiebt der Versuch nur zwei Beziehungen, die in besonderen Fällen gelten, und von welchen man auf die allgemeine Beziehung übergehen kann. Wir werden, einem umgekehrten Wege folgend, den allgemeinen Ausdruck voraussetzen und daraus die speziellen Beziehungen ableiten; der experimentelle Beweis derselben wird auch Bestätigung der allgemeinen Beziehung sein.

Der allgemeine Satz ist folgender:

In jedem Punkte eines isotropen, von Gleichstrom durchflossenen Leiters hat die Dichte u die Richtung des aus der auf die Längeneinheit bezogenen E. M. K. η und der elektrischen Kraft f resultierenden Vektors F; ihr Wert ist dem Tensor des Vektors F proportional.

Wenn c eine Konstante ist, die von der Beschaffenheit des Körpers und von den physikalischen Zuständen, in welchen er sich befindet, abhängt, so gilt

$$u = cF. \tag{19}$$

Wenn wir mit η_s und f_s die Komponenten der Kräfte η und f nach der von u und F gemeinsamen Richtung bezeichnen, so haben wir

$$F = \eta_s + f_s$$

und folglich auch

$$u = c(\eta_s + f_s).$$

Wenn man in einem von Gleichstrom durchflossenen Konduktor einen Teil einer Flussröhre von der Länge l betrachtet, der durch zwei Schnitte A und B (Fig. 49) begrenzt ist, und mit S den Flächeninhalt eines beliebigen Schnittes der Röhre, mit u die Dichte in einem seiner Punkte,

mit i die Stromstärke, die in der ganzen Röhre konstant ist, bezeichnet, so hat man

$$u = \frac{i}{S},$$

und daher ergiebt die eben erwähnte Beziehung für jeden Schnitt der Röhre

$$\frac{i}{cS} = \eta_s + f_s.$$

Indem man die beiden Glieder dieser Gleichung mit dem Längenelement der Achse der Röhre ds multipliziert und über das betrachtete Röhrenstück integriert, ermittelt man

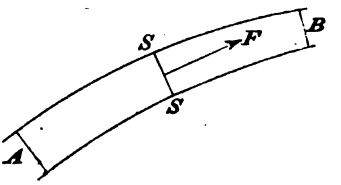

Fig. 49.

$$i\int_0^l \frac{ds}{cS} = \int_0^l \eta_s ds + \int_0^l f_s ds.$$

Wenn e die E. M. K. in dem betrachteten Teile, $V_A - V_B$ die Potentialdifferenz zwischen den beiden äusseren Schnitten A und B ist, so hat man:

$$e = \int_0^l \eta_s ds, \qquad V_A - V_B = \int_0^l f_s ds;$$

und daher:

$$i\int_0^l \frac{ds}{cS} = e + V_A - V_B$$

und ferner

$$ri = e + V_A - V_B, \tag{20}$$

worin man

$$r = \int_0^l \frac{ds}{cS} \tag{21}$$

gesetzt hat.

Die Grösse r hängt nicht von den elektrischen Grössen, die auf den Kreis einwirken, sondern nur von den Dimensionen der Röhre und von der Konstanten c ab.

Man beachte, dass e und i als positiv angesehen werden müssen, wenn sie die als positiv angenommene Richtung von A nach B besitzen.

Diese Beziehung kann ohne Weiteres auf den praktisch wichtigen Fall eines fadenförmigen Konduktors, welcher für sich eine Flussröhre bildet, angewandt werden.

Die Konstante c, die lediglich von der Substanz, aus welcher der Konduktor besteht, und von den physikalischen Zuständen, in welchen er sich befindet, abhängt, heisst *spezifische Leitfähigkeit* des Körpers.

Oft betrachtet man anstatt der Konstanten c den reziproken Wert derselben $\varrho = \frac{1}{c}$, welchen man *spezifischen Widerstand* des Körpers nennt. Die beiden Konstanten ϱ und c sind zwei Grössen, welche einer gegebenen Substanz in bestimmten physikalischen Zuständen eigentümlich sind; die Grösse r nennt man *elektrischen Widerstand des betrachteten Konduktorteiles.*

Der Widerstand hängt lediglich von dem spezifischen Widerstand und von den Dimensionen des Konduktors ab und ist ganz unabhängig von den elektrischen Zuständen des Stromkreises, von welchem der Konduktor einen Teil bildet.

Wir können das gefundene Gesetz folgendermassen aussprechen:

In einem von Gleichstrom durchflossenen, fadenförmigen Konduktor ist das Produkt aus der Stromstärke und dem elektrischen Widerstand des betrachteten Teiles des Stromkreises gleich der Summe aus der E. M. K., die auf diesen Teil einwirkt, und der Potentialdifferenz an den Enden.

Ist der betrachtete Teil des Konduktors homogen, und besitzt er konstanten Querschnitt, so dass ϱ, c, S für die ganze betrachtete Länge l konstant sind, so ist

$$r = \frac{l}{cS} = \varrho \frac{l}{S}. \tag{21'}$$

Der Widerstand eines homogenen Teiles eines von elektrischem Gleichstrom durchflossenen Konduktors, der konstanten Querschnitt hat, ist der Länge direkt, dem Querschnitt umgekehrt proportional.

Die Formel (21') hebt die physikalische Bedeutung der Konstanten ϱ hervor: wenn wir in der Gleichung (21') $l = 1$ und $S = 1$ setzen, so haben wir $r = \varrho$.

Der spezifische Widerstand einer gegebenen Substanz unter bestimmten Bedingungen ist der elektrische Widerstand eines Teiles des Konduktors von der Länge 1 *und dem konstanten Querschnitt* 1, d. h. in absoluten Einheiten der Widerstand eines Würfels der Substanz von 1 cm Kantenlänge, wenn er mit zwei einander gegenüberliegenden Seiten in einen Stromkreis eingeschaltet ist.

Betrachten wir zwei wichtige, spezielle Fälle.

I. Die E. M. K., die den Strom verursacht, liege ausserhalb des betrachteten Teiles des Stromkreises, es sei nämlich in diesem keine E. M. K. vorhanden; dann ist $e = 0$, und daher

$$ri = V_A - V_B, \qquad i = \frac{V_A - V_B}{r}. \tag{20'}$$

In einem Teile einer Strombahn, in welchem keine E. M. K. vorhanden ist, ist die Stromstärke gleich dem Verhältnis zwischen der Potentialdifferenz der Endpunkte (d. h. dem Potentialabfall, welcher in ihm entsteht) und seinem Widerstand; der Strom hat die Richtung, nach welcher das Potential sinkt.

II. Die Punkte A und B fallen zusammen, es handle sich nämlich um einen geschlossenen Stromkreis; dann ist $V_A = V_B$ und folglich

$$e = ri, \qquad i = \frac{e}{r}. \tag{20''}$$

In einem gegebenen, geschlossenen Stromkreise hat der Strom dieselbe Richtung wie die E. M. K., und seine Stärke kommt dem Werte des Verhältnisses der E. M. K. zum gesamten Widerstand des Stromkreises gleich.

Man kann in einem geschlossenen Kreise keinen Strom erzeugen, ohne dass in ihm eine E. M. K. wirkt.

Die Beziehungen (20') und (20'') wurden ausgesprochen und experimentell bewiesen von dem deutschen Physiker Ohm, welcher in seiner im Jahre 1827 herausgegebenen Abhandlung die Analogie hervorhebt, die zwischen dem elektrischen Strome und der Fortpflanzung der Wärme besteht, wenn man die Potentiale mit den Temperaturen und die in der Zeiteinheit übertragene Wärmemenge mit der Stromstärke vergleicht.

Andere Physiker nach Ohm prüften diese Beziehungen experimentell und fanden sie so genau zutreffend, dass man sie auch durch die Versuche als vollständig streng bewiesen annehmen kann.

Obwohl Ohm das allgemeine Gesetz (20) für einen beliebigen, fadenförmigen Konduktor nicht ausgesprochen hat, werden wir doch auch dieses allgemeinere Gesetz mit gutem Rechte als *Ohm'sches Gesetz* bezeichnen können, da man auf dasselbe leicht aus den zwei besonderen, von Ohm studierten Fällen kommen kann.

Die Thatsache, dass die Beziehungen (20') und (20''), die wir aus der Formel (19) abgeleitet haben, experimentell bestätigt sind, berechtigt uns, wie schon erwähnt, auch die allgemeine Beziehung (19), von der wir ausgegangen sind, als richtig anzunehmen.

55. Gesetze von Kirchhoff. — Jede beliebige Aufgabe über Gleichströme ist nun, abgesehen von Schwierigkeiten mathematischer Natur, für uns physikalisch gelöst, weil die allgemeine Beziehung (19) und das Solenoiditäts- oder Kontinuitätsgesetz, welches, wie wir wissen, vom Vektor u erfüllt ist, uns immer Gleichungen in der für die Lösung genügenden Zahl liefern werden.

Für die praktischen Anwendungen hat das Studium eines Systemes von fadenförmigen Leitern grosse Wichtigkeit.

Wir stellen uns zunächst folgende Aufgabe:

In einem Netze von fadenförmigen Leitern sind die Widerstände der einzelnen Seiten und die E. M. KK., die auf diese wirken, gegeben; zu finden sind die Intensitäten der Ströme, welche dieselben durchfliessen.

Die Lösung einer solchen Aufgabe wird uns durch die Anwendung der Kontinuitätsgleichung und des allgemeinen Ohm'schen Gesetzes (20) geboten.

Es ist aber ratsam, diese beiden Beziehungen nach Kirchhoff unter eine etwas andere Form zu bringen, welche für die Lösung der Aufgabe besser geeignet ist.

Man betrachte einen Knotenpunkt des Netzes, d. h. einen Punkt A (Fig. 50), in welchem verschiedene Konduktoren zusammenkommen, und eine beliebige geschlossene Fläche S, in deren Innern der Punkt A sich befindet. Der Solenoidität wegen ist die Elektrizitätsmenge, die in einer beliebigen Zeit in diese Fläche eintritt, gleich Null; aber die Stromstärke in jedem Leiter ist eben die Elektrizitätsmenge, die er in der Zeiteinheit durch jeden seiner Querschnitte führt; es folgt daraus, dass man (die zum Knotenpunkt gerichteten Ströme als positiv betrachtet) schreiben kann:

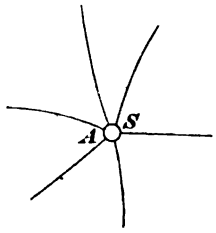

Fig. 50.

$$\sum i = 0, \tag{22}$$

die Beziehung, welche das erste Kirchhoff'sche Gesetz darstellt.

In einem Netze fadenförmiger, von Gleichstrom durchflossener Leiter ist die algebraische Summe der Stromstärken aller in einem Knotenpunkte zusammenkommenden Ströme gleich Null.

Man betrachte nun im Netze ein System von Leitern, welche so miteinander verbunden sind, dass sie ein geschlossenes Polygon bilden (Fig. 51); man nehme auf dem Perimeter eine positive Richtung für die Ströme und die E. M. KK. an und bezeichne mit den durch die Indices $1, 2, \cdots n$ gekennzeichneten Buchstaben e, i, r, V bezw. die E. M. K.,

die Stromstärke, den Widerstand in den Seiten und das Potential in den Ecken. Wenden wir auf die einzelnen Seiten der Reihe nach das Ohm'sche Gesetz an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_1 i_1 &= V_1 - V_2 + e_1, \\ r_2 i_2 &= V_2 - V_3 + e_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_\nu i_\nu &= V_\nu - V_{\nu+1} + e_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_n i_n &= V_n - V_1 + e_n. \end{aligned}$$

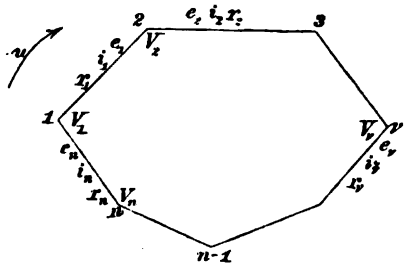

Fig. 51.

Indem man diese Gleichungen Glied für Glied summiert und beachtet, dass die Potentiale sich zu zweien aufheben, bekommt man die Gleichung

(23) $$\sum e = \sum ri,$$

welche das *zweite Kirchhoff'sche Gesetz* darstellt.

In einem Netze fadenförmiger, von Gleichstrom durchflossener Leiter ist die algebraische Summe der Produkte der Stromstärken in den einzelnen Seiten eines beliebigen Schliessungskreises und der entsprechenden Widerstände gleich der algebraischen Summe der E. M. KK., die in dem betrachteten Schliessungskreise wirksam sind.

Wenn irgend ein Netz gegeben ist und man das erste Gesetz auf eine passende Anzahl von Knotenpunkten, das zweite auf eine passende Anzahl von geschlossenen, beliebig im Netze gebildeten Polygonen anwendet, wird man immer eine genügende Anzahl von linearen Gleichungen aufstellen können, um alle Unbekannten zu ermitteln. Man hat dabei den Vorteil, immer gleichförmige Gleichungen zu erhalten.

56. Stromverzweigung. — Es befinde sich im Punkte P (Fig. 52) ein Element oder allgemein ein Apparat, der eine konstante E. M. K. e liefert; mit seinen Polen seien zwei Rheophoren aA und Bb in Verbindung, deren Enden A und B durch mehrere mit den Widerständen r behaftete Leiter 1, 2, 3, $\cdots$ n verbunden sind, welche aber keine E. M. KK. besitzen. Bezeichnen wir mit I die Intensität des Gesamtstromes, d. h. die Stromstärke im unverzweigten Teile des Stromkreises, mit i diejenige eines beliebigen Zweigstromes, d. h. die Stromstärke in einem der n parallel geschalteten Leiter. Wenn die E. M. K. und folglich auch I nach BPA gerichtet ist, so haben alle i die Richtung AB.

Gegeben sind die E. M. K. e, der Widerstand R des unverzweigten Teiles des Stromkreises, die Widerstände r der einzelnen Zweige; wir nehmen uns vor, die Stromstärke I und die n Stromstärken i zu bestimmen.

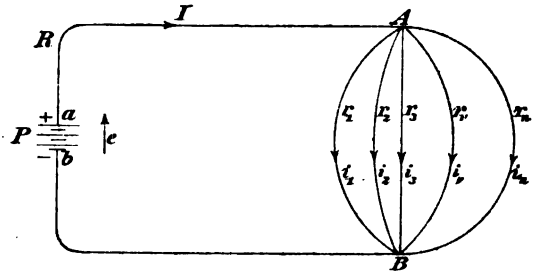

Fig. 52.

Der erste Kirchhoff'sche Satz, auf den Punkt A angewandt, giebt uns

$$I = \sum i.$$

Der zweite Satz, auf jeden einzelnen der n geschlossenen Stromkreise, welche wie $BPArB$ von dem unverzweigten Teile des Stromkreises und einem Zweige gebildet sind, angewandt, giebt uns n Gleichungen von der Form $e = RI + ri$, d. h.

$$i = \frac{e - RI}{r}. \tag{24}$$

Durch gliedweise Summation dieser n Gleichungen erhält man

$$I = \sum i = (e - RI) \sum \frac{1}{r},$$

woraus sich ergiebt:

$$I = \frac{e \sum \frac{1}{r}}{1 + R \sum \frac{1}{r}}, \quad I = \frac{e}{R + \frac{1}{\sum r}}. \tag{25}$$

Die Gleichung (24) kann in eine andere Form gebracht werden; wenn man in dieselben für $e - RI$ den Wert $-\frac{I}{\sum \frac{1}{r}}$ einsetzt, erhält man

$$i = \frac{1}{r} \cdot \frac{I}{\sum \frac{1}{r}}. \tag{24'}$$

Man kann so die Werte der einzelnen i ausrechnen, indem man in die Gleichung (24) oder (24') den aus der Gleichung (25) ermittelten Wert für I einsetzt, und auf diese Weise ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Stellen wir einige allgemeine Betrachtungen über die Gleichungen (25) und (24') an.

Wenn wir

$$(26) \qquad \frac{1}{\sum \frac{1}{r}} = R_1$$

setzen, so wird die Gleichung (25)

$$I = \frac{e}{R + R_1}.$$

Die Grösse R_1, reziprok der Summe der reziproken Werte der Widerstände r, drückt den Widerstand aus, welchen ein einziger Leiter besitzen müsste, damit er, an die Stelle der parallel geschalteten Zweige zwischen A und B gesetzt, in dem so gebildeten, geschlossenen Stromkreise dieselbe Stromstärke I zur Folge hätte, die vorher in dem unverzweigten Teile des Stromkreises herrschte. R_1 heisst deswegen *äquivalenter* oder *Gesamt-Widerstand des Systems der parallel geschalteten Leiter.*

Wenn wir übereinkommen, den reziproken Wert des Widerstandes mit *Konduktanz* (Leitfähigkeit) zu bezeichnen, so können wir, da die Formel (26) uns

$$\frac{1}{R_1} = \sum \frac{1}{r}$$

giebt, behaupten, dass die Gesamtkonduktanz eines Systemes von parallel geschalteten Stromzweigen die Summe der Konduktanzen der einzelnen Zweige ist.

Im speziellen Falle, in dem die n Zweige gleichen Widerstand r besitzen, ist der Gesamtwiderstand

$$(26') \qquad R_1 = \frac{r}{n}.$$

Wenn die Zweige nur zwei und r_1 und r_2 ihre Widerstände sind, so ist der Widerstand

$$(26'') \qquad R_1 = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Wenn ferner einer der Widerstände ein gegebener Bruchteil des anderen ist, z. B. $r_2 = \frac{r_1}{m}$, so hat man

$$(26''') \qquad R_1 = \frac{r_1}{m + 1}.$$

Wenn man der Zahl m die Werte 9, 99, 999 u. s. w. zuschreibt, so ist der Gesamtwiderstand bezw. auf $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc. des Widerstands r des ersten Zweiges reduziert.

Betrachten wir nun die Zweigströme. Die Gleichung (24'), in welcher der Faktor $\frac{I}{\sum\frac{1}{r}}$ unveränderlich bleibt, welchen Zweig wir auch ins Auge fassen, sagt uns:

Die Intensitäten der Zweigströme sind den Widerständen der Zweige selbst umgekehrt proportional.

Dies kann direkt ermittelt werden, indem man das zweite Kirchhoff'sche Gesetz auf den geschlossenen, von zwei beliebigen Zweigen gebildeten Stromkreis anwendet; so hat man für die Zweige 1 und 2

$$r_1 i_1 - r_2 i_2 = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Wenn man diese Gleichung und die Gleichung $I = \sum i$ in Betracht zieht, kann man ferner sagen:

Der Gesamtstrom zerlegt sich in den einzelnen Zweigen in Teile, die den Widerständen der Zweige selbst umgekehrt proportional sind.

Im speziellen Falle, in welchem die n Zweige gleichen Widerstand besitzen, zerlegt sich der Gesamtstrom in gleiche Teile

$$(24'') \qquad i = \frac{I}{n}.$$

Sind nur zwei Zweige vorhanden und mit den Widerständen r_1 und r_2 behaftet, so sind die Zweigströme:

$$(24''') \qquad \begin{cases} i = I\frac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ i_2 = I\frac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

Wenn ferner $r_2 = \frac{r_1}{m}$ ist, so hat man

$$(24'''') \qquad i_1 = \frac{I}{m+1}.$$

So ist für $m = 9, 99, 999, \cdots$ bezw.

$$i_1 = \frac{I}{10}, \quad \frac{I}{100}, \quad \frac{I}{1000}, \quad \cdots.$$

Dem Zweig r_2, der einen Teil i_2 des Stromes führt, giebt man den Namen *Nebenschluss* oder, was häufig geschieht, die englische Bezeichnung adoptierend, *Shunt*. Die Benutzung eines Nebenschlusses erweitert die Grenzen der Verwendbarkeit der zur Messung von Stromstärken dienenden Apparate; um die Stromstärke I zu bestimmen, die in einem gewissen Teile des Stromkreises herrscht, legt man an diesen Teil einen Nebenschluss an, dessen Stromstärke i_1 erheblich geringer als diejenige des

Hauptstromes ist, z. B. nur der $(m+1)$te Teil von I; man misst sodann direkt i_1 und leitet $I = i_1(m+1)$ ab.

Dem Faktor $m+1$ giebt man den Namen *Multiplikationsvermögen des Shuntes.*

57. Arbeit eines Stromes. Joule'sches Gesetz. — Der elektrische Strom ist ein Phänomen, welches Energieumwandlungen veranlasst; zur Erzeugung des Stromes muss Arbeit verrichtet werden, während der Strom seinerseits Arbeit leisten kann. Wir haben gesehen [18], dass die elektrischen Kräfte des Feldes, wenn eine elektrische Masse m von einem Punkte mit dem Potential V_A zu einem Punkte mit dem Potential V_B übergeht, eine Arbeit $m(V_A - V_B)$ leisten. Nun geht in einem Teil AB eines von einem Strome mit der Intensität i durchflossenen Stromkreises in der Zeiteinheit vom Punkte A zum Punkte B eine Elektrizitätsmenge i über; man kann also vorhersagen, dass die elektrischen Kräfte dafür in der Zeiteinheit eine Arbeit

(27) $$w = (V_A - V_B)\,i$$

und in der Zeit t eine Arbeit $(V_A - V_B)\,it$ leisten.

Dieser Ausdruck für die Arbeit des Stromes wurde aus der Analogie, die zwischen der Erscheinung des Stromes und derjenigen der Entladung eines Kondensators besteht, abgeleitet; er kann nicht als streng richtig angesehen werden, wenn nicht der Versuch ihn bestätigt, indem er die Schlussfolgerungen als richtig erweist, die man daraus ableiten kann.

Wenn der Stromkreis AB einen Widerstand r und eine E. M. K. e besitzt, so giebt das Ohm'sche Gesetz

$$V_A - V_B = ri - e,$$

und folglich kann die in der Zeiteinheit vom Strome geleistete Arbeit unter der Form:

(27′) $$w = ri^2 - ei$$

ausgedrückt werden.

Sie besteht also aus zwei Posten, welche wir getrennt betrachten wollen.

Der Posten ri^2 stellt eine Arbeit dar, die stets positiv ist, d. h. die wirklich vom Strome und nicht von äusseren Kräften geleistet wird; sie hängt lediglich von dem Widerstand des Stromkreises und von der Stromstärke ab und ist vollständig unabhängig von jedem chemischen oder mechanischen Einfluss. Wir können uns also die Äusserung dieser Arbeit nicht anders als in Form von Wärme denken. Dies wird durch den Versuch vollständig bestätigt.

Joule begründete zuerst experimentell das folgende Gesetz:

Die in der Zeiteinheit in einem von konstantem Strome durchflossenen Leiter erzeugte Wärmemenge ist dem Widerstand des Leiters und dem Quadrat der Stromstärke proportional.

Dieses Gesetz wurde von uns aus dem Ohm'schen abgeleitet, wir hätten aber auch von dem Joule'schen Gesetz ausgehen und das Ohm'sche ermitteln können. Die beiden Gesetze bedingen sich gegenseitig.

Zwischen den verschiedenen Punkten eines vom Strome durchflossenen Konduktors sind Potentialdifferenzen vorhanden, er ist also Sitz eines elektrischen Feldes. Während jedoch im Dielektrikum das Feld ohne weiteren Aufwand an Arbeit fortbesteht, nachdem die Verschiebung stattgefunden hat, bleibt im Konduktor dagegen das Feld nur so lange erhalten, als der Strom fortdauert; um es fortbestehen zu lassen, muss man eine gewisse Arbeit verrichten, die in Wärme umgesetzt wird. Auf diese Weise wird die Faraday'sche Anschauungsweise, nach welcher einem Konduktor elektrisch-negative Eigenschaften zukommen, immer verständlicher.

58. Beziehung zwischen Arbeit und elektromotorischer Kraft. — Der Posten $(-ei)$ in dem Ausdrucke (27') hängt ausschliesslich von der Stromstärke und von der E. M. K. ab, es liegt also die Annahme nahe, dass die durch ihn dargestellte Arbeit ihren Sitz dort habe, wo die E. M. K. existiert. Diese Arbeit ist positiv, d. h. wirklich vom Strome geleistet und nach aussen verwendbar, wenn die E. M. K. negativ, dem Strome entgegengerichtet ist, d. h. wenn innerhalb des Apparats, in welchem die E. M. K. ihren Ursprung nimmt, der Strom von einem Punkte grösseren zu einem solchen kleineren Potentials fliesst; sie ist dagegen negativ, von äusseren Kräften geleistet, wenn die E. K. M. positiv, also wie der Strom gerichtet ist.

Diese unsere Voraussetzungen werden von der Erfahrung bestätigt.

Betrachten wir z. B. den Fall eines einfachen Voltaelementes. Denken wir uns vorerst, dass dasselbe von einem Strom in der Richtung der E. M. K., d. h. in der Richtung des Stromes, den das Element zu erzeugen sucht, durchflossen sei; in diesem Falle ist die vom Strome in dem Element geleistete Arbeit $(-ei)$ negativ, sie stellt einen Aufwand an Energie dar. In der That finden bei dem Fliessen des Stromes in dem Element chemische Veränderungen statt, durch die sich Zinksulfat bildet; dies ist aber eine Reaktion, welche von Wärmeentwickelung begleitet ist, d. h. sie geht auf Kosten einer von den interatomischen Kräften chemischer Affinität geleisteten Arbeit vor sich; Zink und Schwefelsäure getrennt

stellen eine verfügbare Energie dar, die bei der Zusammensetzung entwickelt wird.

Wenn man dagegen einen der E. M. K. des Elementes entgegengerichteten Strom durch das Element schickt, so tritt die Zersetzung des vorher gebildeten Zinksulfats ein; der Strom im Innern des Elementes leistet also, wie wir vorausgesehen haben, eine positive Arbeit, die sich in potentielle Energie umwandelt, welche von dem entwickelten Zink und der freigewordenen Schwefelsäure dargestellt ist.

Wenn man einen geschlossenen Stromkreis betrachtet, so hat man nach dem Ohm'schen Gesetze

$$e = ri$$

und folglich

$$ri^2 - ei = 0;$$

die gesamte im Stromkreise geleistete Arbeit ist Null, was eine notwendige Folgerung des Prinzips von der Erhaltung der Energie ist. Ein Strom veranlasst in einem Stromkreise ein Verschwinden von Energie unter der Form von Wärme (Joule'scher Effekt), und es ist daher zur Aufrechterhaltung des Stromes notwendig, dass in dem Stromkreise eine Summe e von positiven E. M. KK. wirkt, sodass die von den äusseren Kräften geleistete Arbeit gleich der im Stromkreise verrichteten ist. Wenn der Stromkreis von einem Element und einem einfachen metallischen Widerstand gebildet ist, leisten die Kräfte chemischer Affinität in dem Element eine den in ihm stattfindenden chemischen Reaktionen entsprechende Arbeit; aber infolge der Wirkung des Stromes entwickelt sich die dieser Arbeit entsprechende Wärme nicht nur in dem Bade, in welchem die chemische Reaktion stattfindet, sondern sie verteilt sich in den verschiedenen Teilen des Stromkreises, proportional zu den Widerständen.

Wird in dem Stromkreise ausser dem Joule'schen Effekt noch chemische oder mechanische Arbeit geleistet, so können wir von vorn herein behaupten, dass da, wo solche Arbeiten geleistet werden, E. M. KK. vorhanden sein müssen, die dem Strome entgegengerichtet sind; von der in dem Element verrichteten chemischen Arbeit entwickelt sich nur ein Teil als Wärme, während der andere Teil sich unter der Form von Arbeit im äusseren Stromkreise zeigt; es besteht aber immer die Beziehung $ri^2 = ei$, wobei e die allgebraische Summe der im Stromkreise wirkenden E. M. KK. bedeutet.

Die eben angestellten Betrachtungen gestatten uns das folgende, allgemeine Prinzip aufzustellen, das in jedem Falle von der Erfahrung bestätigt wird.

In jedem Teile eines Stromkreises, in welchem eine Stromstärke i und eine E. M. K. e herrschen, wird eine Arbeit w = ei verrichtet; wenn e und i dieselbe Richtung haben, ist diese Arbeit von äusseren Kräften geleistet und wirkt zur Erzeugung des Stromes mit; wenn e und i einander entgegengerichtet sind, so ist die Arbeit vom Strome geleistet und ausserhalb verwendbar.

Umgekehrt:

Jeder Apparat, in welchem durch Aufwand einer Arbeit w ein Strom i erzeugt wird oder durch einen Strom i eine Arbeit w, welche sich nicht durch eine einfache Wärmeerzeugung, den Joule'schen Effekt, äussert, geleistet wird, ist Sitz einer E. M. K. $e = \frac{w}{i}$, *welche im ersten Falle dem Strome gleich, im zweiten Falle demselben entgegengesetzt gerichtet ist.*

59. Chemische Arbeit. Gesetze von Faraday und Becquerel. — Wenn ein Strom eine zersetzbare Flüssigkeit durchfliesst, so zerlegt er dieselbe. Dieses Phänomen wird *Elektrolyse* genannt, die Flüssigkeit, welche zerlegt wird, heisst *Elektrolyt;* den Behälter, in welchem diese Zersetzung stattfindet, nennt man *Zersetzungszelle* oder *Voltameter*, weil er, wie wir sehen werden, zum Messen elektrischer Gleichströme verwendet werden kann.

In den Elektrolyt sind zwei metallische Platten oder Drähte, die *Elektroden*, eingetaucht, welche den Zweck haben, mittels geeigneter Rheophoren das Voltameter in den Stromkreis einzuschalten. Die Elektrode, durch welche der Strom in die Flüssigkeit eintritt, heisst *Anode*, die, durch welche er austritt, *Kathode.*

Die beiden Körper, in welche sich der Elektrolyt zerlegt, zeigen sich nur auf der Oberfläche der Elektroden und heissen *Ionten;* und zwar heisst *Anion* der nach der Anode und *Kation* der nach der Kathode wandernde Körper.*)

*) Die Ausdrücke *Elektrolyse, Elektrolyt, Elektrode, Anode, Kathode, Ion, Anion, Kation* sind von Faraday eingeführt worden und entstammen, wie die Mehrzahl der von Faraday neu eingeführten Ausdrücke, dem Griechischen. Von der Abstammung des Stammes Elektro- von τὸ ἤλεκτρον = Bernstein ist schon oben die Rede gewesen; ἡ λῦσις = die Lösung; τὸ λυτόν = das Gelöste; ἡ ὁδός = der Weg, die Bahn. Die Begriffe ἡ ἄνοδος = der aufwärtsführende Weg, ἡ κάθοδος = der abwärtsführende Weg, sind zu ihrer vorliegenden Bedeutung gekommen in Anlehnung an die Anschauung der alten Griechen, dass der Seeweg vom Lande ins Meer in die Höhe führe (vergl. auch unsere Ausdrucksweise: „auf die hohe See"), und umgekehrt, vom Meere aufs Land abwärts. So heisst denn auch Anion (τὸ ἄνιον) und Kation (τὸ κάτιον) das nach der betr. Elektrode hin wandernde Ion (von τὸ ἰόν, Gen. ἰόντος, Plur. τὰ ἰόντα). Diese Herleitung der Worte aus dem Griechischen bedingt es, dass man folgerichtig Kation ohne h, Kathode mit h zu schreiben und den Plural von Ion zu bilden hat: Ionten.

Im allgemeinen können wir sagen, dass bei der Elektrolyse einer Säure der Wasserstoff Kation, das Metalloid oder die Gruppe, welche in der Säure mit dem Wasserstoff zusammengesetzt war, Anion ist; in der Elektrolyse eines Salzes ist das Metall, welches den Wasserstoff in der Säure ersetzte, die an der Bildung des Salzes beteiligt war, Kation, und das Säure-Radikal selbst Anion. Die Ionten, die auf diese Weise entstehen, können, wenn es Gase sind, sich frei entwickeln oder sich, wenn es feste Körper sind, auf die Oberfläche der Elektroden niederlegen; es kommt aber oft vor, dass dieselben, ihrer chemischen Eigenschaften zufolge, nicht in freiem Zustande bleiben können; dann müssen sie in neue chemische Verbindungen mit der Flüssigkeit oder mit den Elektroden eintreten. Wenn der Elektrolyt z. B. verdünnte Schwefelsäre (H_2SO_4) ist, so ist H_2 Kation, das Radikal SO_4 Anion; letzteres verbindet sich mit der Anode, wenn diese angreifbar ist, und bildet das entsprechende Sulfat, wirkt dagegen auf das Wasser zurück, wenn die Anode sich nicht angreifen lässt, und bildet die Schwefelsäure wieder, während der freiwerdende Sauerstoff sich an der Anode entwickelt. Auf diese Weise geht die Elektrolyse des mit Schwefelsäure angesäuerten Wassers vor sich, wobei die Schwefelsäure gewissermassen eine aktive, das Wasser aber die passive Rolle spielt.

Für die elektrolytischen Vorgänge gelten folgende, von **Faraday** festgelegte, quantitative Gesetze:

Die Menge des sich zersetzenden Elektrolyts oder die des sich abscheidenden Ions ist der durch das Voltameter hindurchgehenden Elektrizitätsmenge direkt proportional.

Wenn die Stromstärke konstant ist, so ist diese Menge des Elektrolyts oder Ions der Stromstärke und der Zeit, während welcher der Strom fliesst, proportional.

Die Menge der verschiedenen durch eine und dieselbe Elektrizitätsmenge zersetzten Elektrolyten oder der abgeschiedenen Ionten sind ihren chemischen Aquivalenten proportional.

Man pflegt mit dem Namen *elektrochemisches Äquivalent* einer gegebenen Substanz diejenige Masse*) derselben zu bezeichnen, welche durch die Elektrizitätsmenge *Eins* abgeschieden wird. Es ist dies eine für jeden Körper vollständig bestimmte Grösse.

*) Masse hier nicht in dem allgemeinen Sinne als Gegenstand, auf welche ein beliebiges Agens wirkt, verstanden, sondern als schwere Masse, d. h. der Gravitation unterworfene Masse. Nicht selten wird dieser Begriff im gewöhnlichen Sprachgebrauch, freilich fälschlicherweise, „Gewicht" genannt.

Wenn wir das chemische Äquivalent des Wasserstoffes, wie es in der Chemie üblich ist, als Einheit wählen und das elektrochemische Äquivalent desselben mit α bezeichnen, so ist das elektrochemische Äquivalent a eines Körpers, dessen chemisches Äquivalent A ist,

$$a = \alpha A. \tag{28}$$

Wenn man Körper zu betrachten hat, welche sich in verschiedenen Verhältnissen zusammensetzen und dadurch verschiedene Körper bilden können, genügen die Faraday'schen Gesetze nicht mehr, weil dieselben uns nicht sagen, ob eine und dieselbe Elektrizitätsmenge in den verschiedenen Körpern gleiche Mengen von Anion oder Kation erzeugt. In diesen Fällen gilt ein drittes Gesetz, das wir Becquerel verdanken.

In verschiedenen, aus denselben Grundstoffen, aber in verschiedenen Verhältnissen zusammengesetzten Elektrolyten befreien gleiche Elektrizitätsmengen gleiche Massen des Anions.

Dies ist z. B. bei den Kupfer- und Eisenverbindungen der Fall. Sowohl bei den Oxyd- als auch bei den Oxydulsalzen dieser Metalle werden durch eine und dieselbe Elektrizitätsmenge gleiche Massen des Radikals abgeschieden; die Abscheidung des Kupfers bezw. des Eisens ist dagegen verschieden, und zwar verhalten sich die abgeschiedenen Massen in den beiden Klassen von Verbindungen beim ersteren Metall wie 1 : 2 und beim letzteren wie 2 : 3. Es ist für die beiden Verbindungsarten das elektrochemische Äquivalent des Metalls verschieden, während das elektrochemische Äquivalent des Radikals, des Anions, konstant ist.

Der Strom in einem Voltameter verrichtet immer Arbeit. In dem einfachsten Falle ist dies eine positive, thatsächlich von dem Strome geleistete Arbeit, die sich in die potentielle, von den abgeschiedenen Ionten dargestellte Energie umwandelt. Es kann aber auch sein, dass die gesamte Arbeit im Voltameter negativ ist; wenn die Ionten sekundäre chemische Reaktionen hervorbringen, so können letztere eine grössere als die zur Befreiung der Ionten verrichtete Arbeit entwickeln; man hat dann im Voltameter eine Arbeit auf Kosten von äusserer potentieller Energie.

Wenn das von uns festgesetzte [58] allgemeine Prinzip richtig ist, und w die in der Zeiteinheit im Voltameter verrichtete Arbeit bezeichnet, so muss dasselbe Sitz einer E. M. K.

$$e = \frac{w}{i} \tag{29}$$

sein, welche eine dem Strome entgegengesetzte Richtung besitzt, wenn w eine positive Arbeit ist, und welche dagegen mit dem Strome gleichgerichtet ist, wenn w eine negative, von aussen verrichtete Arbeit darstellt.

Der Ausdruck der E. M. K. kann in einer anderen Form geschrieben werden, die von Lord Kelvin herrührt. Bezeichnen wir mit a das elektrochemische Äquivalent irgend eines der Körper, welche an der Reaktion im Voltameter teilnehmen, mit q die für jede Masseneinheit des betrachteten Körpers im Verlauf der chemischen Reaktionen entwickelte Wärmemenge.

In der Zeiteinheit nimmt an der Reaktion eine Masse ai des Körpers teil, und folglich wird eine Wärmemenge aiq erzeugt.

Wenn $\mathscr{A}$ das dynamische Äquivalent der Kalorie*) ist, so ist die Arbeit in der Zeiteinheit

$$w = \mathscr{A} aiq,$$

und folglich die E. M. K.

$$e = \mathscr{A} aq$$

oder nach der Formel (28)

$$e = \mathscr{A} \alpha A q.$$

Nun giebt uns Aq die für jedes chemische Äquivalent des betrachteten Körpers erzeugte oder verzehrte Wärme; wenn wir sie mit Q bezeichnen, haben wir

(29′) $$e = \mathscr{A} \alpha Q.$$

Das Produkt $\mathscr{A}\alpha$ ist eine Konstante; die Grösse Q variiert dagegen von Fall zu Fall mit den betrachteten Körpern und muss experimentell bestimmt werden. Berthelot hat den Wert von Q für eine grosse Anzahl von Körpern bestimmt.

Aus dem gefundenen Ausdruck ergiebt sich unmittelbar die wichtige Thatsache, dass die E. M. K. unabhängig von der Form und den Dimensionen der Apparate ist und ausschliesslich von der chemischen Natur der Körper, die an der Reaktion teilnehmen, abhängt.

Die Richtung der E. M. K. ist, wie man gesehen hat, von dem Vorzeichen der Arbeit und folglich auch von dem Vorzeichen der Grösse Q abhängig. Wenn Q positiv ist, d. h. wenn im Voltameter ein Komplex von Reaktionen stattfindet, durch welche Wärme entwickelt wird, so hat man in dem Voltameter eine E. M. K., die die Richtung des Stromes besitzt. So wird sich z. B. wenn das Elektrolyt angesäuertes Wasser, die Kathode eine Kupferplatte und die Anode eine Zinkplatte ist, an der Kathode H_2, an der Anode das Radikal SO_4 entwickeln, welch letzteres die Platte angreift und $Zn SO_4$ bildet. Nun entwickelt sich bei solchen Reaktionen, welche immer stattfinden, wenn man Zn in $H_2 SO_4$ eintaucht,

*) Gemeinhin: „mechanisches Wärmeäquivalent" genannt.

Wärme auf Kosten der chemischen, potentiellen Energie des Systems; die E. M. K. hat in diesem Falle die Richtung des Stromes. Ein Element ist also nichts Anderes als ein Voltameter, in welchem die Anode von der Flüssigkeit angegriffen wird.

Q ist dagegen negativ, wenn im Voltameter ein Komplex von Reaktionen stattfindet, welche nicht aus sich selbst erzeugt werden können, also nicht ohne den Aufwand an äusserer Arbeit, welche die chemische, potentielle Energie des Systems vermehrt und gleich der Arbeit ist, die sich entwickelt, wenn die entgegengesetzte Reaktion natürlicherweise vor sich geht. So ist z. B. in einem Voltameter mit angesäuertem Wasser und nicht angreifbaren Elektroden das Resultat der chemischen Reaktionen die Zersetzung des Wassers; dafür ist ein Arbeitsaufwand nötig, entsprechend der Wärme, die sich entwickelt, wenn sich die beiden Elemente wieder vereinigen. Wenn Q negativ ist (das ist im allgemeinen der Fall in Voltametern mit nicht angreifbaren Elektroden), so ist die E. M. K. e dem Strome entgegengerichtet.

Das Vorhandensein dieser E. M. K. kann als eine Folge der Absetzung der Ionten an den Elektroden aufgefasst werden. So setzen sich in dem Wasservoltameter mit Platinelektroden die sich entwickelnden Bestandteile des Wassers, Wasserstoff und Sauerstoff, an die Elektroden an; sie werden, ehe sie sich gasförmig entwickeln, an den Elektroden gewissermassen kondensiert, sie schliessen sich ihnen eng an. Man bezeichnet diese Erscheinung der Verdichtung von Gasen an den Oberflächen fester Körper, wie ihn vornehmlich der Wasserstoff zeigt, mit *Occlusion*. Mit der Veränderung der Kontaktflächen ändern sich auch die E. M. KK.

Wenn sich die Elektroden in solchem Zustände befinden, heissen sie *polarisiert;* der gesamte Vorgang wird *Polarisation* und die aus ihr folgende E. M. K. *elektromotorische Kraft der Polarisation* genannt.

Wenn diese E. M. K. eine Folge der Polarisation ist, so muss jene auch nach dem Aufhören des die Polarisation erzeugenden *primären* Stromes weiter fortbestehen, so lange die Elektroden sich polarisiert erhalten, und muss daher in einem einfachen, metallischen Kreise einen *sekundären* oder *Polarisationsstrom* hervorbringen, welcher im Inneren des Voltameters eine der Richtung des primären Stromes entgegengesetzte Richtung hat.

So lange der primäre Strom wirkt, hat man im Stromkreise zwei entgegengesetzte E. M. KK., die ursprüngliche E. M. K. E und die E. M. K. E_p der Polarisation; wenn r der Widerstand des Stromkreises ist, so ist die Intensität i des Stromes, der ihn durchfliesst, nach dem Ohm'schen Gesetze

$$i = \frac{E - E_p}{r} = I - I_p.$$

Die Stromstärke i kann also als Differenz einer Stromstärke $I = \frac{E}{r}$, die von der ursprünglichen E. M. K., und einer solchen $E_p = \frac{I_p}{r}$, die von der E. M. K. der Polarisation hervorgebracht wird, angesehen werden; wenn man die E. M. K. E aufhebt, bleibt im Stromkreise nur der Strom I_p.

Der sekundäre Strom, welcher im Voltameter dem primären entgegengerichtet ist, bringt dort entgegengesetzte chemische Reaktionen hervor, in deren Folge die vorher durch die Wirkung des elektrischen Stromes geschiedenen und auf den Elektroden angehäuften Ionten sich wieder vereinigen; hierdurch wird die Polarisation vernichtet, und der Strom hört wieder auf.

Der primäre Strom verrichtet im Voltameter eine Arbeit, welche in Form chemischer Energie aufgespeichert und als elektrische Arbeit zurückgegeben wird, wenn man den sekundären Strom entnimmt.

Diese Erscheinungen finden im allgemeinen in jedem Voltameter, obwohl in kleinem Massstabe, statt; sie zeigen sich erst, wenn der primäre Strom aufgehört hat, und haben kurze Dauer. In besonderen Fällen kann jedoch die Polarisation sehr gross sein und längere Zeit dauern; die Apparate, durch welche dies erreicht werden kann, und welche im allgemeinen aus Voltametern mit angesäuertem Wasser und Bleielektroden bestehen, nennt man in der Technik *Elektrizitätssammler* oder *Akkumulatoren*.

60. Hypothese von Grotthus. Allgemeiner Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen. — Wir haben bemerkt, dass die Ionten bei der Elektrolyse sich nur auf der Oberfläche der Elektroden bemerkbar machen, ohne dass sich eine Bewegung im Inneren des Voltameters zeigt. Um diese Thatsache zu erklären, bedient man sich folgender, von Grotthus stammender Hypothese.

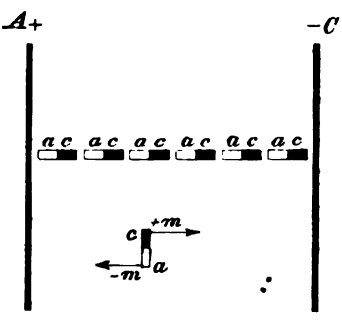

Fig. 53.

Sobald die beiden Elektroden in Verbindung mit den Rheophoren gesetzt worden sind, entsteht, wegen der Potentialdifferenz, die unter ihnen hervorgerufen wird, eine Orientierung der Molekeln, und zwar richtet sich jede von ihnen so, dass das Anion gegen die Anode und das Kation gegen die Kathode (Fig. 53) hinzeigt. Hierbei wird der Zusammenhalt innerhalb der einzelnen Molekeln gelockert. Das äusserste Anion und das äusserste Kation, die sich beide in un-

mittelbarer Nähe der Elektroden befinden, spalten sich ab und treten aus dem Elektrolyten aus. Die hierdurch verbleibenden Reste vereinigen sich mit den betr. Ionten der ihnen in der Strömungslinie zunächst liegenden Molekeln, und dieser Vorgang setzt sich längs jeder Strömungslinie durch die ganze Flüssigkeit hindurch fort, sodass nun wieder der gesamte Elektrolyt aus vollkommenen Molekeln besteht. Die so aufs Neue zusammengesetzten Molekeln richten sich auf dieselbe Weise wie die vorigen, und es wiederholen sich nun die soeben geschilderten Erscheinungen. Die Ionten wandern also von Molekel zu Molekel in successiven intermolekularen Wechseln und zeigen sich frei nur an der Oberfläche der Elektroden.

Indem man die Hypothese von Grotthus ausdehnt, kann man sich denken, dass in jeder Molekel das Kation positiv, das Anion negativ elektrisiert ist, und dass die Orientierung der Molekeln durch die Wirkung des Feldes auf diese Massen geschieht. Nach dieser Hypothese würde die Elektrizität durch direkte Übertragung mit dem entsprechenden Ion von der einen zur anderen Molekel übergehen.

Indem wir diese Hypothese mit dem Begriffe der Polarisation und Verschiebung vereinigen, können wir alle elektrischen Erscheinungen, die wir bis jetzt für die verschiedenen Körper erörtert haben, in einen übersichtlichen Zusammenhang bringen.

Man bringe zwischen zwei metallischen Platten A und C auf beliebige Weise eine Potentialdifferenz hervor, und es sei das Potential V_A der Platte A grösser als das Potential V_C der Platte C. Die erste Wirkung, die dadurch, welches auch die Beschaffenheit des zwischenliegenden Körpers sei, hervorgebracht wird, ist die Polarisation dieses Körpers. Wir können nun die Verschiebung, welcher die Polarisation ihre Entstehung verdankt, stets als eine besondere Orientierung der Molekeln auffassen, derart, dass jede der Molekeln an der Seite, die der positiven Platte A zugewendet ist, negativ und an der der negativen Platte C zugewendeten Seite positiv elektrisiert wird.

Die Wirkungen der Polarisation sind verschieden, je nach der Natur des zwischenliegenden Körpers. Wenn es sich um ein Dielektrikum handelt, entwickeln sich elastische Reaktionen, welche einer weiteren Verschiebung entgegenwirken; es bildet sich im Raume zwischen A und C ein elektrisches Feld, welches fortdauert, so lange Gleichgewicht zwischen den deformierenden Kräften und den elastischen Reaktionen besteht.

Wenn der Körper ein Leiter ist, findet ebenfalls die Polarisation statt, aber es entwickeln sich keine elastischen Reaktionen. Die Verschiebung der Elektrizität von der Platte A zur Platte C kann daher fortdauern, bis die beiden Platten auf dasselbe Potential gekommen sind;

so lange diese aber auf verschiedenem, konstantem Potential gehalten werden, findet zwischen A und C eine stetige Verschiebung statt, es besteht ein Gleichstrom.

Wenn endlich der Körper ein Elektrolyt ist, so findet, wie wir erwähnt haben, infolge der Polarisation die Trennung und die Wiederzusammensetzung der Molekeln statt, und die Elektrizität pflanzt sich von der einen zu der anderen Platte durch Konvektion mit den materiellen Teilchen des Körpers fort.

Diese Betrachtungen lassen sich unabhängig von jeder Hypothese über die Natur der Polarisation anstellen und dienen dazu, alle die beschriebenen Erscheinungen in organischem Zusammenhang darzustellen; es wäre aber gefährlich, auf weitere Betrachtungen in dieser Ideenordnung einzugehen und daraus Schlüsse über die Natur der Elektrizität oder über die Zusammensetzung der verschiedenen Körper ziehen zu wollen.

Drittes Kapitel.

Magnetismus.

§ 1.

Magnetische Kräfte. Magnetische Massen. Magnetische Felder.

61. Magnetische Körper. Magnete. Magnetismus. — Es ist bekannt, dass einige Körper die Eigenschaft besitzen oder erlangen können, Eisen und ähnliche Substanzen anzuziehen und von denselben angezogen zu werden. Diese Eigenschaft ist schon im Altertum wahrgenommen worden an einer bestimmten Verbindung von Eisen und Sauerstoff (Fe_3O_4), welche *in der Natur* als „Magneteisenstein" vorkommt.*) *Auf künstliche Weise* können diese Eigenschaft in hohem Grade erhalten: Eisen und Eisenverbindungen, vornehmlich Stahl; in geringerem Grade: Kobalt und Nickel und in noch geringerem Grade: Chrom.

Die Körper, welche die erwähnte Eigenschaft erwerben können, heissen *magnetisch;* diejenigen, welche dieselbe besitzen, nennt man *magnetisiert* oder *Magnete.*

Ohne auf Hypothesen über die Ursache der an den Magneten zu beobachtenden Erscheinungen einzugehen, d. h. ohne uns mit der Natur dieser Erscheinungen oder mit den besonderen Bedingungen, welchen die Körper im magnetisierten Zustande unterliegen, näher zu befassen, können wir dieser Ursache doch, um eine einfachere Ausdrucksweise zu gewinnen, einen Namen erteilen, und wollen wir im Folgenden zu diesem Zwecke das Wort *Magnetismus* gebrauchen. Adoptiert man diese Ausdrucksweise, so drückt man die Thatsache, dass ein Körper magnetisiert ist, auch dadurch aus, dass man sagt, er *besitzt Magnetismus.*

Nicht nur die oben namentlich erwähnten, sondern alle Körper, auch die Flüssigkeiten und die Gase, zeigen, dass auf sie gewisse Kräfte einwirken, sobald sie in die Nähe von Magneten gebracht werden.

---

*) An Stücken von Eisenerzen, welche aus Gruben in der Nähe der Stadt Magnesia in Kleinasien stammten (*Μαγνήτης* oder *Μαγνῆτις λίθος*) war diese Eigenschaft vornehmlich beobachtet worden, daher gab man ihr den Namen „Magnetismus".

In der Technik sind jedoch das Eisen und dessen Verbindungen mit Kohlenstoff, namentlich der Stahl, die einzigen in Betracht kommenden Körper.

Aus Stahl kann man Magnete herstellen, welche ihren Magnetismus sehr lange beibehalten können; durch passende Gestaltung dieser Magnete konnte man experimentell die Elementargesetze der magnetischen Erscheinungen erforschen. Um die wenigen Grundthatsachen, auf deren Kenntnis wir Wert legen müssen, aus den Versuchen herleiten und zusammenfassen zu können, werden wir uns im Folgenden auf einen prismatischen oder zylindrischen Magnetstab aus Stahl, dessen Querschnitt im Verhältnis zur Länge hinreichend klein ist, beziehen.

Legt man einen solchen Magnetstab in Eisenfeilicht, und zieht man ihn dann heraus, so haften an ihm Feilspäne in büschelförmiger oder strahlenförmiger Anordnung. Sofort fällt hierbei in die Augen, dass die Menge und die Länge dieser Büschel am grössten an den Enden, während die Mitte des Stabes frei von Feilspänen ist.

Wenn man ferner einen solchen Magnetstab einem an einem Faden aufgehängten Eisenstücke nähert, bemerkt man, dass die auf dieses Eisenstück ausgeübte Anziehung am grössten ist, wenn ihm das eine oder das andere Ende des Stabes genähert wird, dagegen unmerklich, wenn man nur den mittleren Teil des Stabes in die Nähe des Eisenstückes bringt. Wir schliessen daraus, dass die magnetischen Kraftwirkungen hauptsächlich von den Enden des Magneten ausgehen.

Aber die beiden Enden des Magneten verhalten sich nicht gleichartig. Wenn man nämlich den Magnetstab in seinem Schwerpunkt unterstützt, so dass er sich frei nach allen Richtungen hin einstellen kann, oder wenn man ihn an einem Faden so aufhängt, dass er horizontal schwebt und um die von dem Aufhängefaden bestimmte Vertikale frei beweglich ist, oder endlich, wenn man den Stab auf eine Spitze setzt, auf welcher er sich in der Horizontalebene drehen kann, so findet man, dass der Magnet nicht in jeder beliebigen Lage in Ruhe bleibt, sondern dass er sich stets in eine bestimmte Lage einstellt; bringt man den Magneten aus dieser Ruhelage, so kehrt er von selbst in dieselbe zurück. In dieser Lage ist der Magnet in stabilem Gleichgewichte; das eine von seinen Enden und zwar immer dasselbe ist nach Norden, das andere nach Süden gerichtet.*)

*) Die Richtung, in welche sich ein frei in horizontaler Ebene schwebender Magnetstab einstellt, ist allerdings nicht auf allen Punkten der Erdoberfläche dieselbe und variiert auch an demselben Orte mit der Zeit. In Europa ist sie jetzt im allgemeinen eine nordsüdliche, doch so, dass das nach Norden zeigende Ende etwas nach Westen hin abweicht.

Die beiden Enden des Magneten verhalten sich also verschieden; es ist somit angezeigt, dieselben durch verschiedene Namen zu unterscheiden; wir nennen sie das *Nordende* und das *Südende*, je nach dem Pol der Erde, nach welchem sie sich bei ihrer Einstellung richten. Wenn wir, wie vereinbart, die Ursache der magnetischen Erscheinungen Magnetismus nennen, so können wir auch das verschiedenartige Verhalten der beiden Enden dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir sagen, sie besitzen zwei verschiedene Arten von Magnetismus; wir nennen *Nordmagnetismus* den des Nordendes, *Südmagnetismus* den des Südendes unseres Stabes.

Wenn ein Magnetstab so gelagert ist, dass er in einer Horizontal ebene sich frei um seinen Mittelpunkt bewegen kann, und wenn einem seiner Enden das Ende eines anderen Magneten genähert wird, so kann man wahrnehmen, dass zwei Enden, wenn beide Nord- oder beide Südmagnetismus enthalten, sich abstossen, und zwei Enden, von denen das eine ein Süd- und das andere ein Nordende ist, sich anziehen. Man sagt von diesem gegenseitigen Verhalten: *die gleichnamigen Enden stossen einander ab, die ungleichnamigen ziehen sich an;* oder auch: *der Magnetismus einer Art stösst den derselben Art ab und zieht den der anderen Art an.*

Wenn ein Stück Eisen oder ein Stück einer anderen magnetischen Substanz einem Magneten genähert wird, so wird es dadurch ohne Weiteres magnetisiert, d. h. es wird nun selbst ein Magnet. Wenn beispielsweise N (Fig. 54) das Nordende eines Magneten ist und ihm ein Eisenstab sn genähert wird, so magnetisiert sich letzterer, und zwar zeigt sich Südmagnetismus an dem Ende s, das N näher liegt, und Nordmagnetismus an dem von N abgewendeten Ende n.

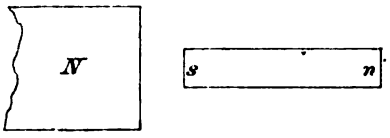

Fig. 54.

Diese Erscheinung wird als *magnetische Influenz* oder *Induktion* bezeichnet. Ein unmagnetischer Körper, welcher in die Nähe eines Magneten gebracht wird, zeigt diese Erscheinung aber nicht. Wir können hieraus erkennen, dass keine magnetischen Wirkungen zwischen zwei Körpern, welche nicht beide magnetisch sind, bestehen können.

62. Coulomb'sches Gesetz. Magnetische Massen. Magnetisches Feld. — Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Untersuchung der Wirkung eines Magneten auf einen anderen im allgemeinen nicht einfach ist. Wenn man auch annimmt, dass die von einem Ende des einen auf ein Ende des anderen ausgeübten Kraftwirkungen auf eine Resultierende reduziert werden können, hat man doch immer noch vier solcher Kräfte zu betrachten. Verwendet man aber sehr dünne und lange Magnete, so

kann man die Enden, an welchen sich der Magnetismus befindet, als materielle Punkte ansehen und ferner durch gewisse Lagerung der Magnetstäbchen erzielen, dass die Wirkung eines Endes eines jeden Magneten so schwach im Vergleich zu der Wirkung der anderen Enden beider Magnete ist, dass erstere bei der Betrachtung vernachlässigt werden kann. Auf diese Weise gelang es Coulomb, die Kraft zwischen den Enden zweier Magnete zu untersuchen und wahrzunehmen, dass die magnetischen Kräfte Newton'sche Kräfte sind.

Wir können danach auf den Magnetismus alle die Betrachtungen übertragen, die wir allgemein für ein Agens, das sich durch Newton'sche Kräfte bemerklich macht, angestellt haben. Und vor allem können wir, ohne eine besondere Hypothese über die Natur des Magnetismus aufzustellen, von *Menge des Magnetismus* oder von *magnetischen Massen* reden und solche Massen als mathematisch bestimmte, durch die Kräfte, die auf sie wirken, messbare Grössen ansehen.

Wenn m und m' zwei in zwei Punkten in der Entfernung r von einander gelegene magnetische Massen sind, ist die Kraft F, die jede von ihnen auf die andere ausübt, durch die Coulomb'sche Formel

$$F = k\frac{mm'}{r^2} \tag{1}$$

gegeben.

Um für die magnetischen Massen m zahlenmässige Angaben machen zu können, muss man die Masseinheit definieren. Die natürlichste und passendste Einheit ist diejenige, durch welche die hier erwähnte Coulomb'sche Formel die einfachste Form annimmt, d. i. diejenige, bei welcher die Konstante k in dem Medium, in welchem jene Kräfte beobachtet werden, d. h. in der atmosphärischen Luft (angenähert auch in einem beliebigen Gase und im Vakuum) gleich *Eins* gesetzt wird. In diesem Falle geht die Formel (1) über in die folgende:

$$F = \frac{mm'}{r^2}$$

und $m' = m$ angenommen, in

$$F = \frac{m^2}{r^2},$$

woraus folgt:

$$m = r\sqrt{F}.$$

Es erhellt daraus, dass m gleich *Eins* ist, wenn die Entfernung r und die Kraft F je gleich *Eins* sind; wir erhalten so folgende Definition:

Die Einheit der magnetischen Masse oder des Magnetismus ist diejenige Magnetismusmenge, welche auf eine gleichgrosse und gleichnamige, in der Entfernung Eins von ihr gelegene Menge die abstossende Kraft Eins ausübt.

Wir setzen ferner die Einheit einer magnetischen Masse gleich $+1$, wenn sie Nordmagnetismus enthält, und gleich -1, wenn sie Südmagnetismus enthält, infolgedessen wird man in allen Berechnungen, in welchen man die Coulomb'sche Formel verwendet, die nordmagnetischen Massen als positive und die südmagnetischen als negative Grössen behandeln. Hierbei ist noch zu bemerken, dass man in der Formel (1) die Kraft F als positiv oder als negativ betrachten muss, je nachdem sie eine abstossende oder eine anziehende Kraft ist, da zwei gleichnamige Massen einander abstossen und man den Faktor k als positiv vorausgesetzt hat.

Wenn in einem bestimmten Raume eine magnetische Masse einer Kraftwirkung ausgesetzt ist, so bildet jener Raum ein *magnetisches Feld*. Ist die magnetische Masse, die zur Untersuchung herangezogen wird, eine positive, d. h. nordmagnetische, so wird die *Richtung des magnetischen Feldes* in dem Punkte, in welchem die Masse gelegen ist, angegeben durch die Richtung der Kraft, welche an diesem Punkte wirksam ist. Eine südmagnetische Masse erfährt darnach einen Antrieb in der dem Felde entgegengesetzten Richtung.

Bringen wir in ein bestimmtes magnetisches Feld an einen bestimmten Punkt die Einheit der magnetischen Masse, so kann man dadurch die Stärke des magnetischen Feldes bestimmen: wir nennen die Intensität der in jenem Punkte auf die Einheit der magnetischen Masse wirkenden Kraft die *Feldstärke* oder die *magnetische Kraft* in dem betreffenden Punkte.

Diese Definitionen sind Anwendungen auf den besonderen Fall des Magnetismus von jenen, die wir allgemein für die Newton'schen Kraftfelder angegeben haben. Auch alle anderen Definitionen und bewiesenen Sätze für die Newton'schen Kräfte lassen sich ohne Weiteres auf den vorliegenden Fall anwenden; dementsprechend werden wir bei der Behandlung der magnetischen Felder von den Begriffen *Potential*, *Aequipotential-* oder *Niveaufläche*, *Kraftfluss*, *Kraftlinie* und *-röhre* Gebrauch machen; ferner werden wir für die magnetischen Felder die Theoreme von Stokes und Green und die daraus abgeleiteten Sätze direkt verwenden. Wir wollen nur erwähnen, dass die Konstante k, die in allen allgemeinen Formeln zum Vorschein kommt, in diesem besonderen Falle, wegen der Wahl, die wir für die magnetische Masseinheit getroffen haben, gleich *Eins* gesetzt werden muss; ferner haben wir zu bemerken, dass man bei der Behandlung der magnetischen Felder die willkürliche Konstante, die in dem allgemeinen Ausdrucke (7) [20] des Potentials erscheint, gleich Null zu wählen pflegt, sodass der Ausdruck des magnetischen Potentials in einem Punkte sich auf

(2) $$V = \sum \frac{m}{r}$$

reduziert, wobei die Summe über alle Massen m des Feldes zu bilden ist.

Wenn alle Entfernungen r unendlich gross sind, so hat man $V = 0$. Es ergiebt sich daraus, dass die Integrationskonstante so gewählt worden ist, dass das Potential in den Punkten, welche von den Massen, die das Feld hervorbringen, unendlich weit entfernt liegen, verschwindend kleine Werte annimmt.

63. Gleichförmiges magnetisches Feld. Pole eines Magneten. — Ein magnetisches Feld heisst *gleichförmig*, wenn in ihm die magnetischen Kraftlinien parallele Gerade sind [16].

Wenn in einem gleichförmigen magnetischen Felde ein Magnet liegt, wirken auf alle Punkte desselben, in welchen nordmagnetische Massen vorhanden sind, Kräfte, die parallel sind und die Richtung des Feldes besitzen; ferner wirken auf die Punkte, in welchen sich südmagnetische Massen befinden, ebenfalls parallele, aber dem Felde entgegengerichtete Kräfte. Nun weiss man, dass die Resultierende eines Systems von parallelen, in den Punkten eines starren Körpers angreifenden Kräften der Grösse nach gleich der Summe aller komponierenden Kräfte und der Richtung nach zu diesen selbst parallel ist, und dass sie, einerlei welches die Lage des Körpers ist, immer durch einen Punkt geht, welcher *Mittelpunkt der parallelen Kräfte* genannt wird. Also ergeben die auf die einzelnen Nordmassen eines in einem gleichförmigen Felde gelegenen Magneten wirkenden Kräfte eine einzige Resultierende, welche gleich ihrer Summe ist und die Richtung des Feldes hat, und welche in einem in bezug auf den Magneten festen Punkte angreifend gedacht werden kann; in gleicher Weise kann man die auf die Südmassen wirkenden Kräfte auf eine dem Felde entgegengerichtete Resultierende zurückführen, die gleich ihrer Summe ist, und die in einem festen Punkte des Magneten angreifend gedacht wird.

Da wir aber sagen, dass ein Punkt Magnetismus enthält, um anzudeuten, dass an ihm eine magnetische Kraft angreift, und da wir uns dieser Kraft bedienen, um die Menge des Magnetismus, die in ihm vorhanden ist, zu definieren, können wir auch sagen, dass bei einem in einem gleichförmigen Felde befindlichen Magneten alle nordmagnetischen und ebenso alle südmagnetischen Massen je in einen einzigen Punkt konzentriert werden können. Diese beiden Punkte, die in bezug auf den Magneten solange eine feste Lage besitzen, als die Verteilung des Magnetismus auf demselben unverändert bleibt, und welche sich bei stabförmigen Magneten in der Nähe der Enden des Stabes befinden, heissen die *Pole*

des Magneten, und zwar heisst der erste der *Nord-* und der zweite der *Südpol* des Magneten.

Die Kräfte, die in einem gleichförmigen magnetischen Felde auf einen Magneten wirken, reduzieren sich also auf zwei Resultierende, wovon die eine, mit dem Felde gleich gerichtete, in dem Nordpol und die andere, dem Felde entgegen gerichtete, in dem Südpol angreift.

Wenn das Feld, in welchem sich der Magnet befindet, nicht gleichförmig ist, so sind die Kräfte, die auf die einzelnen Massen wirken, nicht mehr parallel, und man kann eigentlich nicht mehr von *„Polen"* in dem soeben definierten Sinne, als von bestimmten, unveränderlichen Punkten reden; es ist aber wohl darauf zu achten, dass in der Technik die Benennung Pole auch kurzweg zur Bezeichnung der Enden eines Magneten gebraucht wird.

Wir haben schon erwähnt, dass ein Magnet das Bestreben hat, sich nach einer bestimmten, von der geographischen Lage des Ortes abhängenden Richtung einzustellen; er ist daher der Wirkung von magnetischen Kräften ausgesetzt. Auf der Oberfläche der Erde befinden wir uns nämlich in einem magnetischen Felde, welches *erdmagnetisches Feld* genannt wird. Betrachten wir einen Raum mit geringer Ausdehnung, in welchem sich keine Eisenmassen befinden, so können wir dieses Feld mit genügender Annäherung als gleichförmig ansehen.*) Es bietet uns das Mittel, mit einem in einem gleichförmigen Felde gelegenen Magneten zu experimentieren und so nachzuweisen, dass die Kräfte, welche auf die beiden Pole des Magneten wirken, einander immer gleich sind und ein Kräftepaar bilden, dessen einziges Bestreben das ist, den Magneten in die Richtung des Feldes zu bringen; sobald der Magnet orientiert ist, heben sich die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte gegenseitig auf.

Wenn die beiden Kräfte sich nicht gegenseitig aufhöben, so würden sie eine Resultierende gleich ihrer Differenz haben, die in Horizontal- und Vertikalkomponente zerlegt werden könnte. Nun ist die Vertikalkomponente gleich Null, weil die Erfahrung lehrt, dass ein Stab, nachdem er magnetisiert ist, genau dasselbe Gewicht wie zuvor besitzt. Die Horizontalkomponente ist ebenfalls Null, wie durch Versuche nachgewiesen werden kann.

So beobachtet man, dass ein Magnetstab, der auf einen auf einer Wasserfläche schwimmenden Kork gelegt wird, nach seiner Einstellung in die Richtung des magnetischen Feldes der Erde weder eine Vorwärts- noch eine Rückwärtsbewegung zu machen bestrebt ist. Noch besser kann

*) Die Annahme, dass das erdmagnetische Feld ein gleichförmiges ist, trifft nur zu für Orte, welche hinreichend weit von den erdmagnetischen Polen entfernt sind.

man dasselbe durch die in Fig. 55 gezeigte Anordnung nachweisen. Eine horizontale Scheibe D ist durch drei Fäden ab, ac, ad an dem vertikalen Faden OO', um welchen sie sich frei drehen kann, befestigt. Die Scheibe trägt einen kleinen Magneten ns, der in der Horizontalebene um eine Spitze, die ihm als Stütze dient, drehbar ist, und ein Gegengewicht G, welches dazu dient, das Gewicht des Magneten und ihrer Stütze auszugleichen. Wird nun der Magnet so auf die Scheibe gesetzt, dass die Richtung, in welcher er sich orientiert, senkrecht zu der Vertikalebene ist, die durch den Faden OO' und die dem Magneten als Stütze dienende Spitze bestimmt wird, so würde, wenn die beiden Kräfte, welche die Pole beeinflussen, nicht gleich wären, ihre Differenz ein Drehmoment um die Achse OO' hervorbringen, um welche sich die Scheibe D, der Torsionskraft des Fadens entgegen, drehen würde. Dadurch, dass dieser Fall nicht eintritt, ist bewiesen, dass die beiden oben erwähnten Kräfte einander gleich sind.

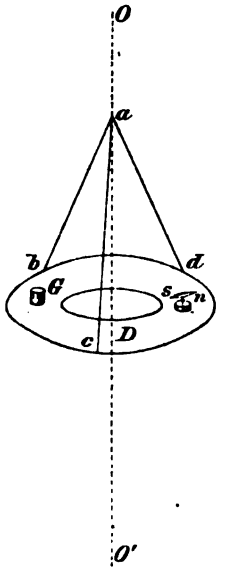

Fig. 55.

Aus der Gleichheit der auf die beiden Pole des Magneten wirkenden Kräfte ergiebt sich, dass die nord- und südmagnetischen Massen, welche der Magnet enthält, numerisch gleich sind, d. h. dass ebensoviel Nordmagnetismus in dem Magneten vorhanden ist, wie Südmagnetismus. Da wir nun die nordmagnetischen Massen als positive Grössen und die südmagnetischen Massen als negative Grössen unseren Berechnungen zu Grunde legen, so folgt, dass *die gesamte Menge von Magnetismus, die ein Magnet enthält, stets gleich Null ist.*

Zu diesem Satze sind wir dadurch gelangt, dass wir einen Magneten in einem gleichförmigen Felde betrachtet haben; dadurch aber haben wir im Magneten weder die Menge noch die Verteilung des Magnetismus verändert, infolgedessen ist unser Satz allgemein; er drückt eine Grundeigenschaft aller Magnete aus, unabhängig von dem Felde, in welchem sie angenommen sind.

64. Magnetisches Moment. — Aus den vorigen Betrachtungen geht hervor, dass ein in einem gleichförmigen Felde befindlicher Magnet für die Wirkungen, die das Feld auf ihn ausübt, dieselbe Geltung hat, wie zwei gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte magnetische Massen, welche in zwei miteinander starr verbundenen Punkten N und S konzentriert sind (Fig. 56). Die die Pole verbindende Gerade SN heisst *Achse des Magneten*, der auf der Achse gemessene Abstand $l = SN$

heisst *Länge des Magneten* und die Richtung SNX der Achse vom Südzum Nordpol heisst *Richtung des Magneten*. Wenn m und $-m$ die entgegengesetzt gleichen, bezw. in dem Nord- und in dem Südpol konzentriert gedachten Massen sind, so wird das Produkt aus der Masse m und der Länge l *magnetisches Moment des Magneten* genannt. Wenn wir mit $\mathfrak{M}$ dieses Moment bezeichnen, haben wir der Definition nach

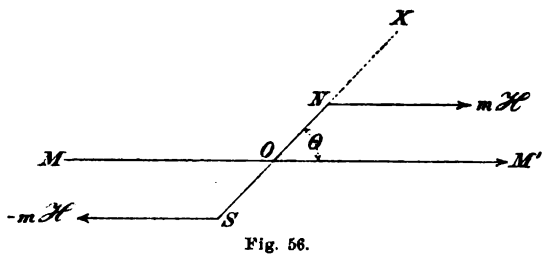

Fig. 56.

$$\mathfrak{M} = lm. \tag{3}$$

Wenn MM' die Richtung und $\mathscr{H}$ die Intensität des magnetischen Feldes ist, in welchem der Magnet sich befindet, so ist der Nordpol der Wirkung einer Kraft, deren Stärke gleich $m\mathscr{H}$ ist, ausgesetzt und erleidet einen Antrieb in der Richtung MM' des Feldes, während der Südpol durch eine gleiche und entgegengerichtete Kraft angezogen wird. Die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar, dessen Moment

$$\mathscr{H} ml \sin \Theta = \mathscr{H} \mathfrak{M} \sin \Theta$$

ist, wobei Θ den von der Richtung des Feldes und jener des Magneten gebildeten Winkel bezeichnet.

Für $\Theta = 90^0$ und $\mathscr{H} = 1$ hat dieses Moment den Wert $\mathfrak{M}$. Wir können daher folgende Definition des Momentes $\mathfrak{M}$ ableiten:

Das magnetische Moment eines Magneten ist das Moment des Kräftepaares, welches den Magneten angreift, wenn er sich in einem gleichförmigen Felde von der Stärke Eins senkrecht zur Richtung des Feldes befindet.

65. Magnetnadel. Untersuchung eines magnetischen Feldes. — Wenn der Magnet, von welchem wir soeben gesprochen, in seinem Schwerpunkt aufgehängt ist, sodass er sich frei im Raume drehen kann, so nimmt er unter der Wirkung der Kräfte des Feldes eine zum magnetischen Felde parallele Richtung an. Wenn dagegen der Magnet von einer Spitze getragen oder an einem Faden aufgehängt und passend ausbalanziert ist, sodass er horizontal bleibt, so kann er sich frei um eine vertikale Achse drehen, orientiert sich und bleibt in der Vertikalebene, die von seiner Drehungsachse und der Richtung des Feldes gebildet ist, in stabilem Gleichgewichte.

Einen sehr leichten Magneten, dessen Längenausdehnung gross ist gegen seine Breitenausdehnung, und der so aufgehängt ist, dass er seiner

Orientierung im Raume oder in einer Horizontalebene immer sehr geringen Widerstand entgegensetzt, nennt man gewöhnlich *Magnetnadel.*

Eine in die verschiedenen Punkte des Feldes gebrachte Magnetnadel kann zur Untersuchung des Feldes und zur Bestimmung der Richtung und Verteilung der Kraftlinien dienen.

So sehen wir, ohne uns mit den Bestimmungen in bezug auf das erdmagnetische Feld zu beschäftigen, doch die Möglichkeit, jenes Studium durchzuführen, und wir können uns darauf beschränken, folgende Definitionen zu erwähnen, von welchen wir später Gebrauch machen werden.

Magnetischer Meridian ist die Vertikalebene, welche die Richtung des erdmagnetischen Feldes enthält, d. h. jene Vertikalebene, in welche sich die im erdmagnetischen Felde frei drehbare Magnetnadel einstellt.

Mit *magnetischer Deklination* wird der Winkel bezeichnet, welcher von dem magnetischen und astronomischen Meridian gebildet wird; man nennt die Deklination eine *westliche* oder eine *östliche*, je nachdem der Nordpol der lediglich unter der Wirkung des Erdmagnetismus gerichteten Nadel sich westlich oder östlich des astronomischen Meridians befindet.

Unter *magnetischer Inklination* versteht man den Winkel, welchen die Richtung des erdmagnetischen Feldes mit der Horizontalebene bildet. Eine Magnetnadel, die um eine durch ihren Schwerpunkt hindurchgehende Horizontalachse frei drehbar ist, bildet mit dem Horizont einen Winkel gleich der Inklination, wenn die Drehungsachse senkrecht zum magnetischen Meridian ist. Eine so angeordnete Magnetnadel trägt den Namen *Inklinationsnadel.* Alle Punkte, in welchen die Inklination Null ist, d. h. in welchen die Inklinationsnadel horizontal bleibt, bilden eine Linie, die um die ganze Erde in der Nähe des Äquators verläuft und *magnetischer Äquator* genannt wird. Nördlich von dem magnetischen Äquator wendet sich der Nordpol der Nadel nach unten, südlich von demselben weist er nach oben. Die Inklination wächst mit der geographischen Breite. In zwei in der Nähe des geographischen Nordpols bezw. Südpols gelegenen Punkten ist die Inklination gleich 90°, d. h. eine dort aufgestellte Inklinationsnadel würde sich vertikal stellen.

Die magnetische Kraft in einem beliebigen Punkte auf der Erdoberfläche kann in zwei Komponente zerlegt werden, wovon die eine horizontal, die andere vertikal ist, und die bezw. *Horizontal-* und *Vertikalintensität des erdmagnetischen Feldes* genannt werden.

Wenn das zu untersuchende magnetische Feld auch nicht vollkommen, aber angenähert gleichförmig ist, so kann es doch praktisch durch eine Magnetnadel untersucht werden, unter der Bedingung, dass deren Länge so klein gewählt wird, dass in dem ganzen Raume, in dem sich ihre Pole während der Einstellung bewegen, die Richtung des Feldes als

parallel und die Feldstärke als konstant angesehen werden können. Wenn man dann im Felde die Kraftlinie bestimmen will, welche durch einen gegebenen Punkt A hindurchgeht, so bringt man in diesen Punkt den Mittelpunkt der Magnetnadel und bestimmt die Richtung, nach welcher sie sich einstellt; dieser Richtung folgend, wählt man einen dem Punkte A nahe gelegenen Punkt B, bringt in ihn den Mittelpunkt der Nadel und bestimmt die neue Richtung der Orientierung; dieser neuen Richtung folgend, wählt man einen dritten Punkt C, wohin man wieder den Mittelpunkt der Nadel bringt, um wieder die von ihr angenommene Lage zu bestimmen, und so verfährt man für eine Reihe von weiteren Punkten. — Die gebrochene Linie, die ihre Knickstellen in den Punkten A, B, C, ... hat, ist keine Kraftlinie, unterscheidet sich aber von einer Kraftlinie um so weniger, je zahlreicher und je näher einander die betrachteten Punkte sind.

66. Magnetische Spektra. — Die Magnetnadel kann praktisch zur Untersuchung eines Feldes nicht dienen, in welchem die Intensität und die Richtung von Punkt zu Punkt stark variieren, in welchem nämlich die Kraftlinien komplizierte Formen und grosse Krümmungen besitzen. In solchen Fällen kann ein Verfahren eingeschlagen werden, das, wiewohl etwas grob, doch sehr bequem ist und schnell zum Ziele führt. Dieses Verfahren gestattet, eine ziemlich genaue Zeichnung der Kraftlinien in einer bestimmten Horizontalebene, d. h. eine angenäherte Darstellung eines horizontalen, ebenen Schnittes des magnetischen Feldes anzufertigen.

In die betrachtete Horizontalebene bringt man ein fest auf einen kleinen Rahmen gespanntes Papierblatt oder eine dünne Glasplatte. Auf das Blatt oder die Platte streut man durch ein Sieb gleichförmig etwas Eisenfeilicht, dann klopft man leicht auf den Rahmen oder auf die Platte, um zu bewirken, dass die Eisenfeilspäne etwas in die Höhe springen. Die Späne magnetisieren sich durch Influenz des magnetischen Feldes; in den Augenblicken, in welchen sie sich beim Springen vom Papierboger oder Glas entfernt befinden, sind sie vollständig frei im Raume und verhalten sich wie frei drehbare Magnetnadeln; durch gegenseitige Beeinflussung ziehen sie sich an, vereinigen sich fadenförmig und fallen orientiert wieder auf den Bogen oder die Platte. Bei weiterem Klopfen vervollständigen die schon gebildeten Fäden ihre Orientierung, sodass nach einiger Zeit das Feilicht auf dem Papier oder dem Glas deutliche Linien zeichnen wird, welche den Verlauf der Kraftlinien in der Nähe der Ebene, auf welcher das Feilicht sich befindet, darstellen. Das entstandene Gebilde nennt man ein *magnetisches Spektrum*.

Dadurch, dass man eine Glaspatte benützt, die mit einem Firnis bestrichen ist, welcher in kaltem Zustande fest, erwärmt aber weich ist,

dringen beim Erwärmen der Platte die Eisenfeilspäne in den Firnis ein, sodass sie nach dem Erkalten in der angenommenen Lage bleiben und somit die Figur fixiert ist.

Die Figuren 57 bis 60 geben Beispiele von magnetischen Spektren, welche durch das oben beschriebene Verfahren hergestellt wurden.

Die Figur 57 stellt das Spektrum in einer Horizontalebene über einem prismatischen Stabmagneten dar. Die Kraftlinien gehen vom Nordende des Stabes divergierend aus und endigen konvergierend in dem Südende;

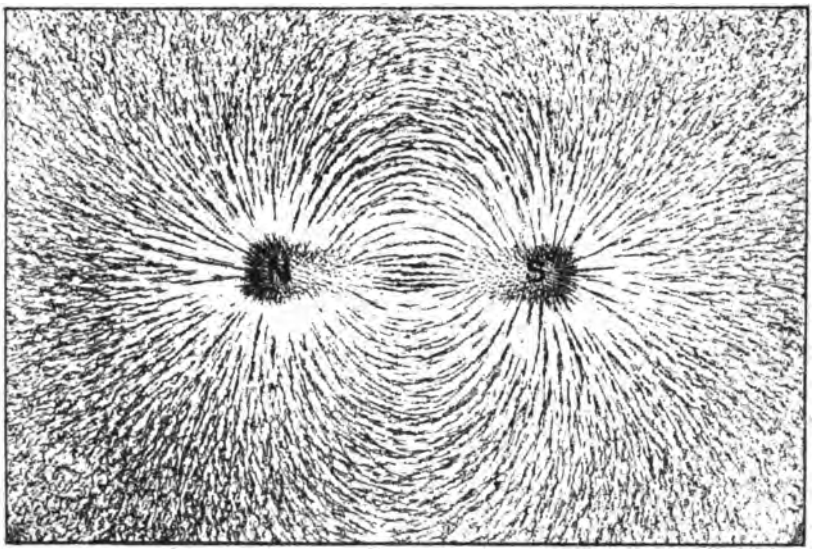

Fig. 57.

in der Nähe der Enden verlaufen sie innerhalb der Grenzen der Zeichnung nahezu radial; im mittleren Teile des Stabes laufen sie parallel zur Achse des Magneten vom Nord- zum Südende. An den Enden des Stabes hat das Spektrum zwei Regionen, in denen nur wenig Späne liegen geblieben sind. Dies ist der Fall, weil die Kraftlinien in jenen Regionen vertikal oder gegen die Papierebene sehr geneigt sind, und folglich die Feilichtfäden auf ihrer glatten Unterlage nicht liegen bleiben konnten.

Das so ermittelte magnetische Spektrum giebt uns nur die Verteilung der Kraftlinien im magnetischen Felde ausserhalb des Magneten, sagt aber nichts in bezug auf dessen Inneres.

Wir werden sehen, dass die Kraftlinien innerhalb des Magneten nicht die Fortsetzung der äusseren sind, und deswegen haben wir bis jetzt gesagt, dass die Kraftlinien vom Nordende *ausgehen* oder *beginnen* und am

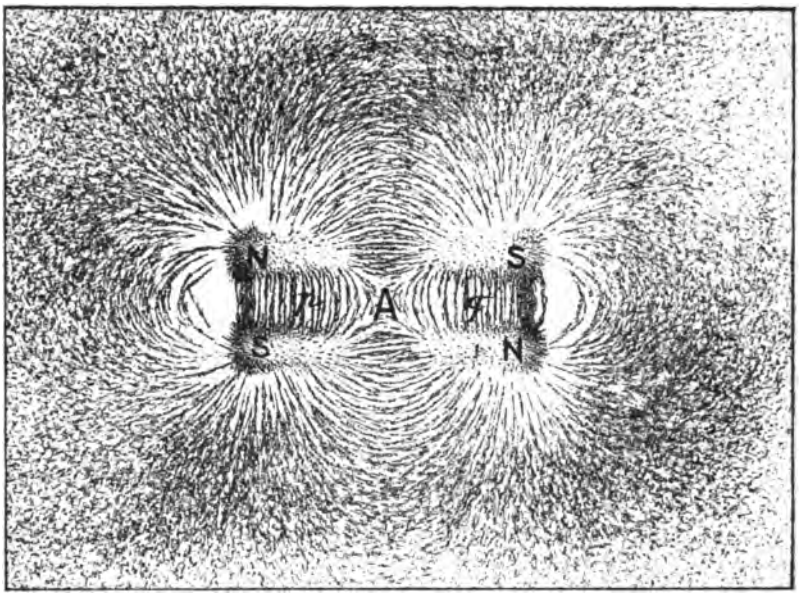

Fig. 58.

Südende *endigen* oder *aufhören*, weil es unrichtig wäre zu sagen, dass die Kraftlinien an einem Ende des Magneten aus- und beim anderen wieder eintreten.

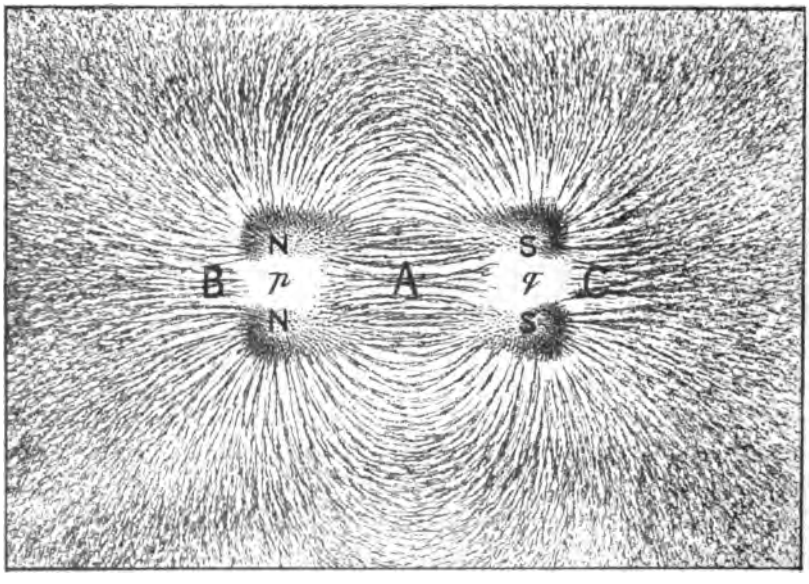

Fig. 59.

Die Figur 58 stellt das Spektrum dar, das man mittels zweier prismatischer, in einer Horizontalen parallel nebeneinander liegender Magnete erhält, wenn sich die Pole des einen Magneten den entgegengesetzten Polen des anderen gegenüber befinden. In dem Raume ausserhalb der Achsen der beiden Magnete haben die Kraftlinien ungefähr denselben Verlauf wie im vorigen Falle. In dem Raume *A* in der Mitte zwischen den beiden Magneten hat man fast keine Kraftlinien, und die Stärke des magnetischen Feldes ist hier sehr gering; die einander gegenüberliegenden Enden sind dagegen durch Kraftlinien verbunden, welche in den Teilen *p* und *q* zwischen den Stäben sehr dicht und nahezu parallel sind und ein sehr starkes, zu den beiden Stäben nahezu senkrechtes Feld anzeigen; ausserhalb des Raumes zwischen beiden Magneten gehen die Kraftlinien wieder von einem Ende aus und endigen im anderen.

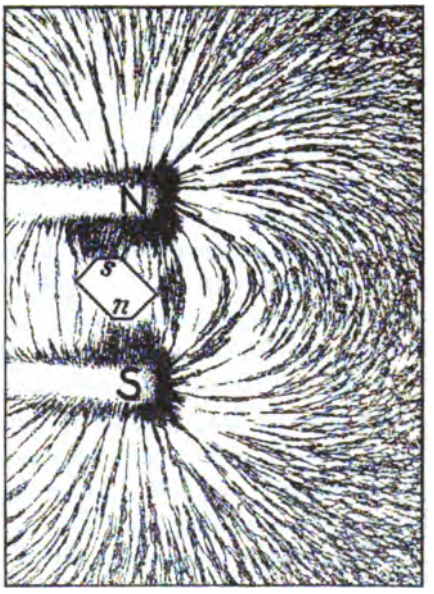

Fig. 60.

Die Figur 59 zeigt die Anordnung der Kraftlinien bei zwei parallelen, geradlinigen Magneten, ähnlich der vorigen; es sind jedoch in diesem Falle die Magnete so gelegt, dass sich die gleichnamigen Pole einander gegenüber befinden. Die Zeichnung ist in dem zwischen den Achsen der beiden Magnete eingeschlossenen Raume vollständig verschieden von der vorigen. Zwischen den beiden Stäben (*A*) biegen sich die Kraftlinien, die von den Nordenden ausgehen, nach kurzem Verlauf, nehmen eine Richtung annähernd parallel den Achsen der Stäbe an und endigen an den Südenden; in den Regionen *B* und *C* sind die Kraftlinien ebenfalls annähernd parallel zu den Achsen. In den Regionen *p* und *q* zeigt das Spektrum keine Feilichtlinien, das Feld ist hier sehr schwach und verschwindet ganz in den beiden Mittelpunkten dieser Regionen.

Endlich stellt die Figur 60 einen Teil des Spektrums dar, das man erhält, wenn quer zwischen den entgegengesetzten Polarenden *N* und *S* zweier paralleler Magnete oder eines Hufeisenmagneten ein Stück von weichem Eisen liegt. Man ersieht, dass in diesem Falle die Kraftlinien am dichtesten in jenen Regionen sind, wo der Abstand zwischen dem

Eisenstücke und den magnetisierten Stäben am kleinsten ist, d. h. zwischen N und s und zwischen S und n.

67. Faraday'sche Regel über die Wirkung der Kraftlinien in einem Felde. — Wir haben die magnetischen Kräfte als fernwirkende Kräfte, die sich zwischen magnetisierten Körpern zeigen, betrachtet; in der Darstellung der erörterten Thatsachen und der Gesetze, die sich auf jene beziehen, haben wir uns nach dieser Anschauungsweise gerichtet. Es war zweckmässig, dies zu thun, in Anlehnung an die bis jetzt besprochenen Thatsachen, ohne in die Behandlung eine vorzeitige Hypothese einzuführen. Aber bei dem heutigen Stande der Wissenschaft widerstrebt es unserem Verstande, Kräfte anzunehmen, welche in die Ferne wirken, ohne dass zu ihrer Übertragung ein Medium auftritt, welches den Raum zwischen den Körpern, zwischen welchen sie wirken, ausfüllt. Dass die Kräfte sich durch das Medium von Teil zu Teil fortpflanzen, kann aber nicht bezweifelt werden, und wir werden sehen, dass man, wie für die elektrischen, so auch für die magnetischen Kräfte, auf ganz natürliche Weise zu dieser Überzeugnng durch die Gesamtheit aller jetzt bekannten Erscheinungen gelangt. Die Kenntnis der wenigen bis jetzt erwähnten, elementaren Thatsachen gestattet uns noch nicht, Erörterungen in dieser Hinsicht zu entwickeln; wir wollen aber doch jetzt schon erwähnen, dass Faraday, von der Gesamtheit der Erscheinungen auf dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus geleitet, die Notwendigkeit einer solchen Hypothese fühlte und nach derselben die ganze Darstellung seiner experimentellen Untersuchungen richtete. Die Ausdrucksweise selbst, die Faraday gebrauchte, und welche die moderne Wissenschaft als die angebrachteste und den Thatsachen entsprechendste anerkennt, ist in Anlehnung an jene Idee abgebildet.

Maxwell, welcher das Werk von Faraday vervollständigte, gab den Auffassungen des Letzteren mathematische Form und Genauigkeit und wies nach, dass alle magnetischen Erscheinungen ebenso durch die eine wie durch die andere Hypothese erklärt werden können, sodass unter dem rein mathematischen Gesichtspunkte die beiden Hypothesen gleichwertig sind.

Uns den Ideen Faradays anschliefsend, können wir die magnetischen Kräfte dadurch erklären, dass wir dieselben als Wirkung einer Deformation oder eines besonderen Zwangszustandes des Mediums betrachten, in welchem sich die Magnete befinden. Diese Deformation muss derart sein, dass in jedem Volumenelement ein Zug in der Richtung der Kraftlinien und ein Seitendruck in der hierzu senkrechten Richtung besteht. Auf diese Weise treten die Kraftlinien und -röhren, für welche wir rein

geometrische Definitionen gegeben haben, in der Redeweise thatsächlich hervor, als ob sie wirklich existierten. Die Kraftröhren sind Teile des Mediums, welche in der Längsrichtung gedehnt und in der Querrichtung verdichtet sind und deswegen das Bestreben haben, sich zu verkürzen und zu schwellen; analog sind die Kraftlinien fadenförmige Elemente des Mediums, die darnach streben, sich zu verkürzen und einander abzustossen.

Die Richtigkeit dieser Darlegungen wird erst später bewiesen werden können, wir haben aber diese Begriffe einstweilen unabhängig von ihrem wissenschaftlichen Wert jetzt schon als feststehend vorausgeschickt, weil wir daraus bei dem praktischen Studium der magnetischen Felder Nutzen ziehen können. Die letzten Betrachtungen lassen sich, vollständig entkleidet von dem, was auf die Hypothese über das Medium anspielt, in eine Regel zusammenfassen, welche Faraday als das Endergebnis aus der Betrachtung aller beobachteten Erscheinungen, nicht nur im magnetischen, sondern allgemein in einem beliebigen Kraftfelde, aussprach. Diese Regel lautet: *Die Kraftlinien suchen sich zu verkürzen und stossen sich gegenseitig ab.*

Die Faraday'sche Regel ist sehr bequem zu verwenden, wenn man eine Zeichnung oder ein Modell der in einem Felde vorhandenen Kraftlinien besitzt und durch blosse Anschauung ohne Berechnungen finden will, welcher Art die Bewegungsantriebe sind, welche die im Felde gelegenen Körper durch die Kräfte des Feldes erfahren. Wir können z. B. diese Regel auf die speziellen Fälle anwenden, für welche wir die magnetischen Spektra betrachtet haben.

Beschäftigen wir uns zuerst mit jenem magnetischen Spektrum, welches dem Falle zweier paralleler, geradliniger Magnete mit gegenüberstehenden ungleichnamigen Polen entspricht (Fig. 58). In den Regionen p und q sind die Kraftlinien sehr dicht aneinander und senkrecht zu den beiden Magneten; sie suchen sich zu verkürzen; ihre Wirkung auf die beiden Magnete ist analog derjenigen, die man hätte, wenn an Stelle der Kraftlinien zwischen den beiden Magneten gespannte elastische Schnüre wären, welche, ihrer Elastizität wegen, sich zu verkürzen suchten. Die beiden Magnete werden also gegeneinander angetrieben, sie ziehen einander an.

In jenem Falle dagegen, in welchem sich die gleichnamigen Pole der beiden Magnete gegenüber liegen (Fig. 59), verlaufen die Kraftlinien in den Regionen A, B, C parallel; sie stossen sich gegenseitig ab, wie dies bei elastischen, mit den Magneten verbundenen Federn der Fall wäre, welche das Bestreben haben, sich auszudehnen.

Betrachten wir zuletzt das Spektrum (Fig. 60) in dem Falle, in welchem ein Eisenstück sn zwischen zwei ungleichnamigen Polen N und S

liegt. Die beiden Kraftlinienbündel, welche die Enden des Stäbchens *sn* mit den Polen verbinden, suchen sich zusammenzuziehen und wirken wie Bündel von elastischen Schnüren, welche mittels ihrer Zugspannung bestrebt sind, das Stück *sn* zu drehen und dasselbe mit seiner grössten Längenausdehnung senkrecht zur Achsenrichtung der Magnete zu lagern.

---

§ 2.

Magnetisierung. — Verteilung des Magnetismus in den Magneten.

68. Bruch eines Magnetstabes. — Die obenerwähnten Thatsachen betreffen die äusseren Wirkungen der Magnete und bieten sich daher naturgemäss zuerst unserer Beobachtung dar. Wir können auch etwas über die innere Zusammensetzung der Magnete sagen, indem wir von einem sehr bekannten, elementaren Versuche ausgehen.

Man nehme einen geradlinigen, magnetischen Stahlstab NS (Fig. 61) und breche ihn nach der Ebene mm entzwei. Die beiden Stücke Ns und nS, die dadurch entstehen, enthalten nicht nur jene Art von Magnetismus, die sich vor dem Bruch in dem unversehrten Magnetstabe, bezw. auf den Enden N und S bemerkbar machte, sondern sie enthalten auch Magnetismus von der anderen Art, und zwar zeigen Nordmagnetismus die Enden N und n und Südmagnetismus die Enden s und S. Die beiden Teile des Stabes sind zwei vollständige Magnete, welche alle Eigenschaften, von denen im vorigen Paragraphen die Rede war, besitzen, unter anderen auch diejenige, gleiche Mengen der beiden Arten von Magnetismus, d. h. insgesamt eine magnetische Masse zu enthalten, die gleich Null ist.

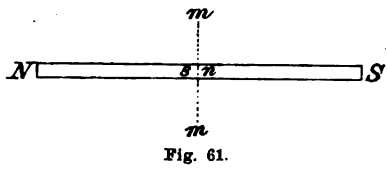

Fig. 61.

Der Versuch kann für jeden der beiden Teile des Stabes wiederholt werden und führt zu demselben Resultat. Wenn man die so erhaltenen Stücke noch einmal entzwei bricht und auf diese Weise in der Teilung des Stabes weiter bis zur äussersten, durch die Ausführbarkeit gesteckten Grenze geht, so wird man immer dieselbe Erscheinung beobachten, nämlich, dass jeder der Teile einen vollständigen Magneten bildet, welcher eine nord- und eine gleiche südmagnetische Masse enthält. Weil wir keine Unterteilungsgrenze kennen, bei welcher der Versuch aufhört, dasselbe Resultat zu geben, so müssen wir annehmen, dass in einem Magneten

auch die kleinsten Teilchen, welche man durch mechanische Teilung erhalten kann, noch ebenso viele Magnete seien. Diese kleinen Magnete, aus deren Gesamtheit der ganze Magnet besteht, heissen *Elementarmagnete;* die von dem ganzen Magneten hervorgebrachten Wirkungen sind die Resultierenden von jenen, die von den einzelnen komponierenden Elementarmagneten herrühren. Über die Dimensionen dieser Elementarmagnete sagt bis jetzt die Erfahrung nichts; wir wissen nur, dass dieselben kleiner sein müssen als jene, welche wir bei der äussersten Unterteilungsgrenze erreichen können; deswegen müssen wir in der mathematischen Behandlung auch die verschwindend kleinen Teile, welche den einzelnen Volumenelementen entsprechen, in welche wir jeden Magneten zerteilt denken können, als vollständige Magnete ansehen; wir müssen nämlich annehmen, dass die Elementarmagnete von den Volumenelementen des Magneten dargestellt werden.

Der eben erwähnte Grundversuch beweist, dass die Erscheinungen des Magnetismus, wie immer geartet sie auch sein mögen, gewiss nicht nur von den Enden der Magnete abhängig sind, in welchen, wie wir sagten, die magnetischen Kräfte sich zeigen, sondern dass sie vielmehr von den Zuständen der ganzen Masse des Magneten abhängen; jedes seiner Elemente befindet sich in jenen besonderen Zuständen, deren Vorhandensein die Erscheinungen des Magnetismus bedingt.

69. Richtung und Stärke der Magnetisierung. Gleichförmige und ungleichförmige Magnete. — Ein Magnet heisst *gleichförmig,* wenn man ihn als aus gleichen Elementarmagneten zusammengesetzt betrachten kann, welche sämtlich gleiche Dimensionen, gleiches magnetisches Moment und gleiche Richtung haben.

Die gemeinsame Richtung der magnetischen Achsen der Elementarmagnete heisst *Richtung der Magnetisierung.* Das magnetische Moment des ganzen Magneten ist die Summe der magnetischen Momente der Elementarmagnete und ist folglich dem Volumen des ganzen Magneten proportional. Es sei $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und v das Volumen des Magneten; der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{v}$ ist dann das magnetische Moment der Volumeneinheit; er heisst *Stärke* oder *Intensität der Magnetisierung* und wird mit J bezeichnet:

$$J = \frac{\mathfrak{M}}{v}. \tag{4}$$

Die Definitionen, die wir soeben für den besonderen Fall einer gleichförmigen Magnetisierung gegeben haben, können ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall einer beliebigen Magnetisierung ausgedehnt werden,

unter der einzigen Bedingung, dass dieselbe in dem betrachteten Raume keine Unstetigkeit bietet. In der That wird man die Magnetisierung in einem hinreichend kleinen Volumenelemente immer als gleichförmig ansehen können. Auf das Element kann man die oben dargelegten Definitionen anwenden; wir werden also *Richtung der Magnetisierung* in einem beliebigen Punkte eines Magneten die Richtung der magnetischen Achse eines den Punkt einschliessenden Elementarmagneten nennen.

Wenn $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und dv das Volumen eines Elementes ist, so ist die Stärke der Magnetisierung in einem Punkte desselben Elementes durch

$$J = \frac{d\mathfrak{M}}{dv} \tag{4'}$$

gegeben.

Wir werden *Stärke der Magnetisierung in einem Punkte eines Magneten* den Grenzwert nennen, welchem das Verhältnis des magnetischen Moments eines den Punkt einschliessenden Magnetteiles zu dem Volumen des Teiles selbst zustrebt, wenn das letztere nach Null konvergiert.

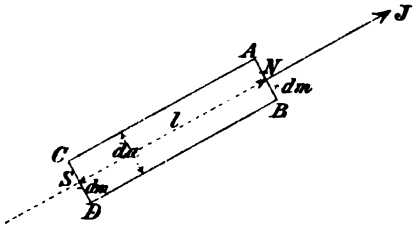

Fig. 62.

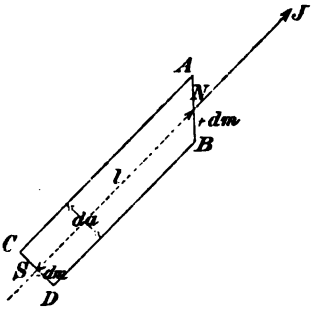

Fig. 63.

Betrachten wir einen der Elementarmagnete $ABCD$ (Fig. 62), den wir prismatisch oder zylindrisch voraussetzen können; bezeichnen wir mit $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment, mit l die Länge und mit da den Querschnitt desselben. Die Grössen l und da sind beide verschwindend klein; wir können aber da als unendlich kleine Grösse höherer Ordnung gegen l vernachlässigen. Es seien endlich $+dm$ und $-dm$ die entgegengesetzt gleichen Mengen von Magnetismus, die das Element enthält. Die Erfahrung lehrt, dass in einem Magneten mit länglicher Form die magnetischen Massen als in der Nähe der Enden befindlich angenommen werden können; wir können daher die Annahme machen, dass in dem Element die Massen sich nur auf den Endseiten AB und CD verteilt befinden und ferner, wenn wir nur die Wirkungen bei Entfernungen, die im Vergleiche mit l

nicht unendlich klein sind, ins Auge fassen, voraussetzen, dass die Massen auf den beiden Seiten gleichförmig verteilt sind, d. h. wir können uns vorstellen, dass dieselben in den Mittelpunkten N und S dieser Flächen konzentriert sind. Bei einer solchen Verteilung ist das magnetische Moment durch $d\mathfrak{M} = ldm$ ausgedrückt; das Volumen des Elements ist $dv = lda$ und folglich ist

$$J = \frac{dm}{da}, \qquad dm = Jda. \tag{5}$$

Wenn der Elementarmagnet dagegen die in Fig. 63 angedeutete Form besitzt, so können die Massen $+dm$ und $-dm$ noch als gleichmässig auf den äusseren Seiten verteilt angesehen und folglich nochmals in den Mittelpunkten N und S konzentriert gedacht werden. Wenn l der Abstand NS und da ein Schnitt senkrecht zur Achse des Prismas ist, hat man $d\mathfrak{M} = ldm$, $dv = lda$, und folglich bestehen noch die Gleichungen (5).

70. Magnetisierungslinien. Magnetische Fäden. — Die Magnetisierung ist eine Vektorgrösse; auf dieselbe können alle Sätze angewandt werden, die wir für die Vektoren allgemein bewiesen haben. Es ist wichtig, die Flusslinien, die Flussröhren und die Flüsse des Vektors J zu betrachten.

Die Flusslinien der Magnetisierung, welche auch einfach *Magnetisierungslinien* genannt werden, sind Linien, bei welchen in jedem Punkte die Richtung der Magnetisierung mit der Tangente der Linie zusammenfällt. Durch jeden Punkt eines Magneten kann eine Magnetisierungslinie gezogen werden.

Wenn man durch alle Punkte einer im Innern eines Magneten gezogenen, in sich geschlossenen Linie die Magnetisierungslinien zieht, so ist deren geometrischer Ort eine röhrenförmige Fläche und der von dieser begrenzte geometrische Körper eine *Magnetisierungsröhre.*

Besitzt der Schnitt einer Röhre mit einer zu den Magnetisierungslinien senkrechten Fläche einen unendlich kleinen Inhalt, so bildet die Magnetisierungsröhre einen *magnetischen Faden.*

Wir werden ferner unter dem Namen *Fluss der Magnetisierung durch eine Fläche* das auf die ganze Fläche ausgedehnte Integral

$$\int J \cos \Theta \, dS = \int J_n \, dS$$

verstehen, wobei man mit Θ den von der Richtung der Magnetisierung und der positiven Richtung der Normalen der Fläche eingeschlossenen Winkel, mit J_n die Komponente $J \cos \Theta$ der Magnetisierung nach der genannten Normalen und mit dS den Inhalt eines Flächenelementes bezeichnet.

Betrachten wir einen magnetischen Faden PQ, und denken wir ihn uns durch senkrechte Schnitte P, A, B, C, $\cdots$, Q (Fig. 64) in viele unendlich kleine Teile zerlegt. Jedes von diesen Elementen kann als ein Zylinder oder ein Prisma angesehen werden, in welchem die Magnetisierung gleichförmig und parallel zur Achse ist, und stellt einen Elementarmagneten dar. Die auf den Endseiten eines dieser Elemente verteilte Masse ist (5)

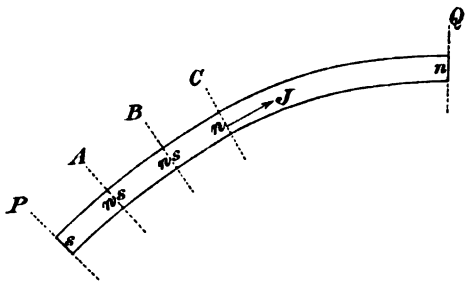

Fig. 64.

$$dm = Jda.$$

Dem Produkt Jda erteilt man den Namen *Potenz des Fadens*. Im allgemeinen variiert die Potenz von Element zu Element eines und desselben Fadens.

71. Solenoidische oder einfache Fäden. Solenoidische Magnetisierung. — Wenn ein magnetischer Faden die Eigenschaft hat, dass die Potenz in jedem seiner Elemente den gleichen Wert besitzt, d. h. dass der Fluss der Magnetisierung für die ganze Länge des Fadens konstant ist, dann nennen wir ihn, eine schon im allgemeinen gegebene Definition anwendend, einen *solenoidischen Faden*. Einen solenoidischen, magnetischen Faden nennt man auch *einfach*.

In jedem Element eines solchen Fadens hat die auf den Endflächen verteilte magnetische Masse $dm = Jda$ denselben Wert; deswegen müssen wir uns auf jedem der die aufeinanderfolgenden Elemente trennenden Schnitte A, B, $C\cdots$ (Fig. 64) zwei gleiche und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte magnetische Massen, nämlich eine auf jeder Seite, verteilt denken. Die Wirkungen dieser beiden Massen in die Ferne heben sich gegenseitig auf; man kann dies auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, im Innern des Fadens sei in seiner ganzen Länge keine Masse von *freiem Magnetismus* vorhanden. Wenn wir dagegen die Endseiten des Fadens betrachten, so haben wir in P die südmagnetische Masse des ersten Elements, welche von keiner Nordmasse aufgehoben wird, und analog auf der Seite Q die nordmagnetische Masse des letzten Elements, welche von keiner Südmasse neutralisiert wird; dies lässt sich auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, auf den beiden Enden des Fadens seien bezw. die Massen $-dm$ und $+dm$ von freiem Magnetismus vorhanden.

Wenn ein Magnet so magnetisiert ist, dass man ihn in viele solenoi-

dische Magnete zerteilt denken kann, so nennt man seine Magnetisierung *solenoidisch* und ihn selbst einen *solenoidischen Magneten.* Ein solcher Magnet enthält in seinem Innern keinen freien Magnetismus und besitzt solchen nur auf der Oberfläche. Auf derselben ist der freie Magnetismus ein positiver oder Nordmagnetismus in allen Punkten, in welchen magnetische Fäden endigen, oder in welchen die Magnetisierung in bezug auf den Magneten von innen nach aussen gerichtet ist; er ist dagegen ein negativer oder Südmagnetismus in allen den Punkten, von welchen ein magnetischer Faden ausgeht, d. h. wo die Magnetisierung nach dem Innern des Magneten gerichtet ist. Jedem Elemente der Oberfläche, welches eine positive magnetische Masse enthält, entspricht als anderes Ende eines magnetischen Fadens ein Flächenelement, auf welchem eine gleiche, aber negative magnetische Masse liegt. Der freie Magnetismus bildet auf der Oberfläche des Magneten zwei Verteilungen von gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Massen; jedem Element entspricht hierbei ein anderes analog gelegenes Element, in welchem eine entgegengesetzt gleiche Masse vorhanden ist.

In einem solenoidischen Magneten kennt man, sobald die Verteilung der Magnetisierung, d. h. der einfachen Fäden gegeben ist, die Verteilung des freien Magnetismus, und man kann die Kraftwirkung ausrechnen, die der Magnet ausübt. Wenn wir beispielsweise einen einfachen Faden ins Auge fassen, so ist nach der Formel (2) das von ihm in einem beliebigen Punkte P, welcher sich in den Entfernungen r_1 bezw. r_2 vom Nord- und Südende des Fadens befindet, hervorgerufene Potential

$$V = dm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = Jda\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Indem hierdurch der Wert des Potentials in jedem Punkte bekannt ist, ist auch das Feld vollständig bestimmt.

72. Nicht solenoidische Fäden und Magnete. Freier Magnetismus im Innern eines Magneten. Dichte des Magnetismus. — Die Beziehung $dm = Jda$ zwischen der Stärke der Magnetisierung und der auf den Endflächen jedes Elementes verteilten magnetischen Masse kann auf die einzelnen Elemente eines magnetischen Fadens angewandt werden, auch wenn dieser nicht solenoidisch ist; auch in diesem Falle kann man durch sie die Menge dm von freiem Magnetismus ausrechnen, welche auf dem einen oder auf dem anderen Ende des Fadens vorhanden ist; es genügt hierzu für J und da die dem Ende selbst entsprechenden Werte einzusetzeu.

Betrachten wir nun aber das Innere des Fadens. Weil die solenoidische Bedingung

$$Jda = dm = \text{Konst.}$$

nicht erfüllt ist, heben sich die auf dem Nordende eines Elementarmagneten vorhandene Masse von Magnetismus dm und diejenige auf dem Südende des nachfolgenden Elementarmagneten $-dm'$ gegenseitig nicht vollständig auf; man hat daher Massen von freiem Magnetismus nicht nur auf den Enden, sondern auch im Innern des Fadens. Wenn also die magnetischen Fäden, aus welchen ein Magnet besteht, nicht solenoidisch sind, so enthält der Magnet freien Magnetismus nicht nur auf der Oberfläche, sondern auch im Innern. Man hat daher im allgemeinen zwei Verteilungsarten von freiem Magnetismus zu betrachten, die eine auf der Oberfläche eines Magneten, d. h. an der Grenze seines Volumens, und die andere im Innern des Magneten, d. h. durch sein Volumen verteilt.

Sowohl für die eine, als auch für die andere spricht man von *Dichte des Magnetismus.*

Für eine Verteilung auf der Oberfläche eines Magneten nennt man *mittlere Dichte* des Magnetismus die Menge von freiem Magnetismus, welche auf der Flächeneinheit vorhanden ist. Wenn dm die unendlich kleine, auf einem Flächenelement vom Inhalte dS verteilte magnetische Masse ist, so ist die Dichte σ des Magnetismus in irgend einem Punkte dieses Elements

$$\sigma = \frac{dm}{dS}. \tag{6}$$

Für eine Verteilung des Magnetismus im Innern eines Magneten heisst *mittlere Dichte* des Magnetismus die Menge des in der Volumeneinheit vorhandenen freien Magnetismus. Wenn dm die in einem Volumenelemente dv vorhandene magnetische Masse ist, so ist die Dichte ϱ in irgend einem Punkte des Elements

$$\varrho = \frac{dm}{dv}. \tag{7}$$

73. Magnetische Blätter. Lamellare Magnete. — Es heisst *magnetische Lamelle* oder *magnetisches Blatt* eine unendlich dünne Schicht einer magnetischen Substanz, in deren sämtlichen Punkten die Richtung der Magnetisierung senkrecht zu der Fläche ist. Wie ein magnetischer Faden aus in Reihe gelegten Elementarmagneten gebildet ist, wovon sich immer zwei benachbarte die entgegengesetzten Pole bieten, so ist ein magnetisches Blatt aus nebeneinanderliegenden Elementarmagneten gebildet, wobei aber die gleichnamigen Pole alle an derselben Seite liegen.

Wenn J die Stärke der Magnetisierung in einem Punkte eines magnetischen Blattes und n die Dicke des Blattes in diesem Punkte ist, so

heisst das Produkt nJ *magnetische Potenz des Blattes.* Wir werden die magnetische Potenz eines Blattes mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, d. h. wir werden setzen:

$$\mathfrak{P} = nJ. \tag{8}$$

Im allgemeinen variiert die magnetische Potenz von Punkt zu Punkt eines und desselben Blattes. Ein Blatt, in dessen sämtlichen Punkten die Potenz gleichen Wert besitzt, heisst *einfach.* Wenn ein einfaches magnetisches Blatt an allen Stellen eine gleiche Dicke n besitzt, so ist auch die Magnetisierung J gleichförmig; wenn n von Punkt zu Punkt veränderlich ist, so variiert J mit n in umgekehrtem Verhältnis.

In einem magnetischen Blatte hat man auf den beiden Seiten gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte magnetische Belegungen. Auf einem Element der Nordfläche vom Inhalte da hat man eine magnetische Menge

$$dm = Jda$$

mit einer Dichte

$$\sigma = \frac{dm}{da} = J;$$

gleiche und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene magnetische Masse und Dichte hat man auf dem entsprechenden Element der anderen Seite. Wenn J konstant ist, wie in einem einfachen Blatte mit gleichmässiger Dichte, sind die beiden Verteilungen des Magnetismus gleichförmig.

Ein Magnet, welcher aus einfachen, aufeinanderliegenden Blättern bestehend gedacht werden kann, heisst *lamellar.* Wenn die Zahl der Elementarblätter unendlich gross und die Potenz eines jeden unendlich klein ist, so ist die Magnetisierung stetig verteilt. Die Magnetisierungslinien sind senkrecht zu den Blättern, aus welchen der lamellare Magnet besteht.

74. Verteilung des freien Magnetismus in den Magneten. — Wir haben schon nachgewiesen, dass im allgemeinen in einem Magneten zwei Verteilungsarten von freiem Magnetismus, die eine auf der Oberfläche, die andere in dem Volumen des Magneten, zu betrachten sind. Wir können nun sehen, wie die beiden Verteilungen bestimmt werden können, wenn in jedem Punkte des Magneten die Stärke und die Richtung der Magnetisierung gegeben sind.

1. *Verteilung des Magnetismus auf der Oberfläche.* — Auf der Oberfläche SS (Fig. 65) eines Magneten betrachte man ein Element AB vom Flächeninhalt dS; AN sei die nach aussen gerichtete Normale des Elements und AJ die Richtung der Magnetisierung in den Punkten des

Elementes selbst; man bezeichne mit J die Stärke der Magnetisierung und mit Θ den Winkel der beiden Richtungen AN und AJ.

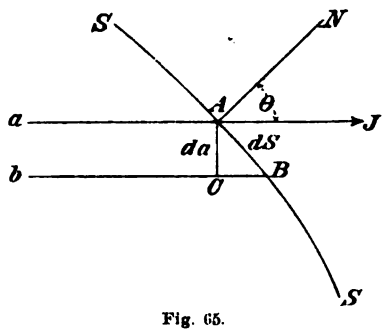

Fig. 65.

Auf dem Element AB endigt ein magnetischer Faden $aAbB$. Eine diesen Faden senkrecht schneidende, durch den Punkt A gelegte Ebene, in der Figur durch AC dargestellt, hat einen Flächeninhalt $da = dS \cos \Theta$. Die auf dem Element dS vorhandene, freie magnetische Masse ist diejenige, welche auf dem Ende dieses Fadens vorhanden ist, und wird (5) durch

$$dm = Jda = JdS \cos \Theta$$

oder, wenn man mit $J_n = J \cos \Theta$ die Komponente von J nach der Normalen zur Fläche SS bezeichnet, durch

$$dm = J_n dS \tag{9}$$

gegeben, wobei J_n als positiv anzunehmen ist, wenn nach aussen gerichtet.

Die auf einem Element der Oberfläche eines Magneten vorhandene Menge von freiem Magnetismus ist gleich dem aus dem Magneten durch das Element austretenden Flusse der Magnetisierung.

Wenn σ die Dichte des freien Magnetismus in einem Punkte A des Elementes dS ist, so erhält man, da

$$\sigma = \frac{dm}{dS},$$

aus der Formel (9):

$$\sigma = J_n = J \cos \Theta, \tag{10}$$

oder:

Die Dichte des freien Magnetismus in einem Punkte der Oberfläche eines Magneten ist der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich der Komponenten der Magnetisierung nach der äusseren Normalen der Fläche.

Die auf einem beliebigen, endlichen Teil der Oberfläche eines Magneten verteilte Menge von freiem Magnetismus ist durch das auf den ganzen betrachteten Teil ausgedehnte Integral

$$\int J_n dS$$

ausgedrückt, oder:

Auf einem beliebigen Teil der Oberfläche eines Magneten ist eine Masse von freiem Magnetismus verteilt, welche der Grösse und dem Vorzeichen nach dem aus demselben Flächenteil austretenden Flusse der Magnetisierung gleicht.

Die gesamte auf der ganzen Oberfläche eines Magneten verteilte Masse M_s von freiem Magnetismus wird durch das vorige Integral

$$M_s = \int J_n dS$$

gegeben, wobei das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden muss, oder:

Die gesamte Menge von freiem Magnetismus, welche auf der Oberfläche eines Magneten verteilt ist, ist gleich dem Magnetisierungsflusse, der aus derselben Fläche austritt.

2. *Verteilung des freien Magnetismus im Innern eines Magneten.* — Bezeichnen wir, wie oben, mit M_s die Summe der Massen von freiem Magnetismus, welche auf der Oberfläche des Magneten verteilt sind, und analog mit M_v die Summe der Massen von freiem Magnetismus im Innern des Magneten, dann stellt die Summe $M_s + M_v$ die gesamte im Magneten vorhandene Menge von Magnetismus dar; aber die gesamte Masse von Magnetismus, die in einem vollständigen Magneten vorhanden ist, ist immer gleich Null [63], es muss folglich

$$M_v + M_s = 0$$

sein. Daher

$$M_v = -M_s = -\int J_n dS.$$

Die im Volumen eines Magneten verteilte Menge von freiem Magnetismus ist gleich dem Fluss der Magnetisierung, welcher in den Magneten durch dessen gesamte Oberfläche eintritt.

Man kann noch weiter gehen und die Menge M_v von freiem Magnetismus ausrechnen, welche in einem von einer beliebigen, geschlossenen Fläche begrenzten Teile eines Magneten vorhanden ist. Stellen wir uns zu diesem Zwecke vor, dass man, ohne die Verteilung der Magnetisierung zu ändern, den Teil M aus dem Magneten PQ vom Übrigen absondert. Auf der Fläche des losgetrennten Stückes und auf jener der Höhlung, die infolge der Abtrennung von M im Magneten PQ entsteht, werden zwei gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Verteilungen frei, welche sich vorher innerhalb des Magneten gegenseitig aufhoben.

Wenn aber die Magnetisierung, wie wir voraussetzen, in jedem Punkte der Stärke und Richtung nach unverändert bleibt, dann bleiben auch die Verteilungsverhältnisse des freien Magnetismus in dem Volumen der beiden Teile des Magneten unverändert. Nun lehrt uns einer der Grundversuche, auf welchem die ganze Theorie des Magnetismus beruht [68], dass der Teil M nach der Lostrennung zu einem vollständigen Magneten wird: wir können folglich die obigen Schlüsse auf ihn anwenden. Wenn also M_v die Menge des im Innern der Fläche S vorhandenen freien Magnetismus und M_s die Masse bezeichnet, die auf der Fläche S frei werden würde, wenn das Stück M von PQ losgetrennt wäre, so haben wir:

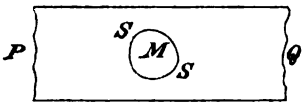

Fig. 66.

$$M_v = -M_s = -\int J_n dS,$$

wobei das Integral über die ganze Fläche S ausgedehnt und die Stärke der Magnetisierung J_n als positiv angenommen wird, wenn sie nach aussen gerichtet ist. Dieses Ergebnis kann durch den folgenden Satz ausgedrückt werden:

Die Menge von freiem Magnetismus, die in dem von einer beliebigen, geschlossenen Fläche begrenzten Volumenteile eines Magneten enthalten ist ist der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem Flusse der Magnetisierung, der in dasselbe Volumen durch dessen Oberfläche eintritt.

Das soeben bewiesene Theorem gilt auch für den Fall einer geschlossenen Fläche S (Fig. 67), welche teilweise ausserhalb des Magneten liegt und nur ein Stück desselben ausschneidet. Um dies nachzuweisen, genügt es zu bemerken, dass J in allen Punkten des ausserhalb des Magneten liegenden Teiles ADB von S gleich Null ist, und dass folglich der in S eintretende Fluss der Magnetisierung sich auf jenen beschränkt, welcher durch die Fläche ACB eintritt. Nun ist letzterer Fluss der Magnetisierung entgegengesetzt gleich der Menge von freiem Magnetismus, die auf der Oberfläche ACB des Stückes M vorhanden sein würde, welches durch einen der Fläche ACB entsprechenden Schnitt vom Magneten PQ losgetrennt wäre. Aber das vom Magneten losgetrennte Stück M würde selbst einen vollständigen Magneten bilden, in welchem die gesamte Menge von Magnetismus gleich Null ist; folglich wäre die Menge von freiem Magnetismus auf ACB entgegengesetzt gleich der übrigen, teilweise im Volumen M, teilweise

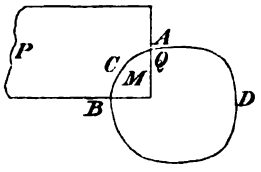

Fig. 67.

auf der Fläche AQB verteilten Masse. Der in S durch ACB eintretende Fluss der Magnetisierung ist also gleich der Summe der magnetischen Massen, die im Volumen M und auf der Fläche AQB vorhanden sind, d. h. gleich der Summe aller innerhalb der geschlossenen Fläche S vorhandenen magnetischen Massen. Und das ist es, was wir beweisen wollten.

Auch für eine Fläche S, welche kein Stück eines Magneten enthält, ist das Theorem giltig und einleuchtend. In der That ist sowohl der Fluss der Magnetisierung als auch die Menge des innerhalb der Fläche enthaltenen freien Magnetismus Null.

Für die analytische Behandlung lassen sich die beiden Theoreme in bezug auf die Verteilung des Magnetismus auf der Oberfläche und in dem Volumen eines Magneten in zwei Gleichungen zusammenfassen, welche wir Lord Kelvin verdanken. Wir wollen sie in wenigen Worten erläutern.

1) *Verteilung auf der Oberfläche.* — Wenn wir A, B und C die Komponenten von J nach drei orthogonalen Koordinatenachsen und bezw. α, β und γ den Kosinus des Winkels, welche jede dieser Achsen mit der nach aussen gerichteten Normalen zur Oberfläche des Magneten bildet, nennen, so haben wir

$$J_n = A\alpha + B\beta + C\gamma$$

und, unter Anwendung der Gleichung (10)

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

2) *Verteilung innerhalb des Volumens des Magneten.* — Betrachten wir ein unendlich kleines Prisma, mit den Kanten dx, dy, dz parallel zu den Koordinatenachsen genommen, und nennen wir A, B und C die Komponenten nach den Achsen der Magnetisierung J in dem Eckpunkte, welcher dem Koordinaten-Mittelpunkte am nächsten ist und die Koordinaten x, y und z hat. Berechnen wir nun den Fluss der Magnetisierung, der in das Prisma eintritt; er besteht aus drei Flüssen, parallel zu den drei Achsen; jeder derselben ist die Differenz zwischen dem Flusse, der durch eine Seite ein-, und jenem, der durch die gegenüberliegende austritt. Der durch die Seite $dydz$ mit der Abscisse x eintretende Fluss ist $Adydz$; derjenige, der durch die gegenüberliegende Seite, welche denselben Flächeninhalt $dydz$ und die Abscisse $x + dx$ hat, austritt, ist dagegen

$$\left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) dydz;$$

die Differenz aus den beiden ist

$$-\frac{\partial A}{\partial x} dxdydz,$$

und dies ist der in der Richtung der x-Achse eintretende Fluss. In analoger Weise findet man, dass die nach der Richtung der y- und z-Achse eintretenden Flüsse bezw.

$$-\frac{\partial B}{\partial y} dxdydz \quad \text{und} \quad -\frac{\partial C}{\partial z} dxdydz$$

sind.

Der gesamte in das Prisma eintretende Fluss der Magnetisierung ist also:

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Wenn man mit ϱ die Dichte des im Innern des Prismas vorhandenen freien Magnetismus bezeichnet, so ist die in diesem enthaltene Menge von freiem Magnetismus

$$\varrho dxdydz.$$

Nach dem von uns bewiesenen Satze müssen diese Massen und der eintretende Fluss der Magnetisierung J gleich sein; man hat daher

$$-\varrho=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z};$$

dies ist die zweite Gleichung von Lord Kelvin.

Ein einfaches Beispiel wird die Bedeutung und den Gebrauch der soeben bewiesenen Sätze genügend erklären.

Betrachten wir einen Magneten, der die Form eines prismatischen oder zylindrischen Stabes besitzt, und nehmen wir an, dass in ihm die Magnetisierung in jedem Punkte parallel zu der Achse sei (Fig. 68).

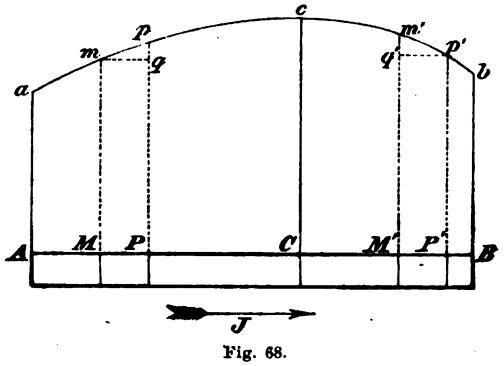

Fig. 68.

Auf der ganzen Seitenfläche des Zylinders oder des Prismas hat man $J_n = 0$, und folglich ist kein freier Magnetismus vorhanden. Die freien magnetischen Massen auf der Oberfläche reduzieren sich einfach auf zwei bezw. auf den Endflächen A und B verteilte Massen. Wenn wir mit J_a und J_b die Werte von J auf den Endflächen A und B bezeichnen und a den Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes nennen, so sind die beiden magnetischen Massen

$$m_a = aJ_a \quad \text{und} \quad m_b = aJ_b.$$

Im Innern des Stabes, in dem von zwei bestimmten Schnitten M und P begrenzten Teile, hat man eine Menge von freiem Magnetismus, welche gleich der Differenz zwischen dem Flusse der Magnetisierung, der in diesen Teil durch den Schnitt M ein-, und dem Flusse, der aus demselben durch den Schnitt P austritt, ist. Wenn J_n und J_p die Werte der Intensität der Magnetisierung in den beiden Schnitten sind, so ist die Menge von freiem Magnetismus zwischen M und P gleich

$$aJ_m - aJ_p = a(J_m - J_p).$$

Wenn wir die Werte von J in den verschiedenen Schnitten des Stabes durch die Ordinaten Aa, Mm, $Pp, \cdots$, Bb einer Linie $amp \cdots b$ darstellen, so ist die Differenz $J_m - J_p$ in der Figur durch die Strecke pq gegeben, welche auf Pp durch den Schnitt mit der zu AB parallelen Geraden mq erhalten wird. In unserer Figur ergiebt sich die so bestimmte magnetische Masse negativ. Dasselbe Resultat erhält man, indem man andere an der Seite AC gelegene Teile des Stabes betrachtet, längs welcher, in der Richtung der Magnetisierung fortschreitend, J zunimmt. In einem Teile dagegen, der rechts vom Punkte C liegt, und in dem J abnimmt, findet man eine positive Menge von freiem Magnetismus

$$a(J_m - J_p) = a \cdot q'm'.$$

Der Querschnitt C, in welchem die Magnetisierung die grösste Intensität besitzt, teilt den Stab in zwei Teile, von denen der eine Süd-, der andere Nordmagnetismus frei verteilt enthält.

Dieses Beispiel weist uns auf die Notwendigkeit hin, zwischen Magnetisierung und Menge des freien Magnetismus scharf zu unterscheiden; letztere hängt nicht von der absoluten Grösse der ersteren, sondern nur von ihren Variationen ab. Die Menge von freiem Magnetismus ist Null, wo die Stärke der Magnetisierung konstant ist, und ein Maximum, wo J am stärksten variiert.

Die mittlere Menge des freien Magnetismus für jede parallel zur Achse zwischen den Querschnitten M und P gemessene Längeneinheit ist

$$a \frac{J_m - J_p}{MP}.$$

Bezeichnen wir mit x den Abstand eines beliebigen Schnittes von der Basis A, und setzen wir voraus, dass die Entfernung zwischen den beiden Schnitten M und P unendlich klein, gleich dx sei, dann ist das Verhältnis $\frac{J_p - J_m}{MP}$ der Differentialquotient der Funktion J nach x, folglich geht der vorige Ausdruck in

$$-a \frac{dJ}{dx}$$

über.

Damit hat man die Menge des freien Magnetismus für die Längeneinheit in dem Schnitte mit der Abscisse x ausgedrückt. Wenn die Magnetisierung in der ganzen Länge des Stabes konstant ist, so ist die in einem beliebigen Teile des Volumens des Magneten verteilte Menge von freiem Magnetismus gleich Null, wie schon angegeben. Stellen wir uns in diesem Falle vor, dass der Stab kreisförmig gebogen und an den beiden Enden zusammengelötet werde, sodass sich ein Ring ergebe, und

ferner, dass die Magnetisierungslinien sich auch aus geraden Linien in konzentrische Kreise umwandeln und die Stärke der Magnetisierung längs jedes derselben konstant bleibe, dann heben sich auch die beiden entgegengesetzt gleichen magnetischen Massen auf, welche in dem gleichförmigen, geradlinigen Stabmagneten an den Enden vorhanden waren, und dann enthält der Magnet keine freie magnetische Masse mehr. Wie gross auch die Stärke der Magnetisierung sein möge, der Magnet übt nach aussen keine Kraft aus.

75. Potential, das von einem Elementarmagneten herrührt. Allgemeiner Ausdruck für das von einem beliebigen Magneten herrührende Potential. — Wenn die Richtung und die Stärke der Magnetisierung in allen Punkten eines Magneten oder eines Systems von Magneten gegeben sind, so genügt dies zur vollständigen Definierung des Magneten oder des Systems; ebenso wie die äusseren Wirkungen, sind auch die inneren Zustände der einzelnen Magnete bestimmt. Wir haben in der That gesehen, wie man die Verteilung des freien Magnetismus im Innern und auf der Oberfläche der Magnete berechnet; wenn die Massen, welche das Feld erzeugen, auf diese Weise bekannt sind, kann man die Kraft und das Potential in jedem Punkte bestimmen, und zwar durch Anwendung der bekannten Beziehungen der Newton'schen Kraftfelder.

Wir können die von dem System der Magnete herrührenden, äusseren Wirkungen auch auf andere Weise berechnen, indem wir beachten, dass dieselben die Resultierenden aus den Wirkungen sind, welche von den Elementarmagneten, in welche die Magnete zerteilt gedacht werden können, herrühren. Es ist wichtig zu wissen, wie man das in einem Punkte von einem Elementarmagneten hervorgebrachte Potential berechnen kann.

Es möge $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und dv das Volumen eines Elementarmagneten darstellen, in welchem die Stärke der Magnetisierung den Wert J besitzt. Nach dem Gesagten [69] kann der Magnet durch zwei magnetische Massen $+dm$ und $-dm$ ersetzt werden, welche in den Mittelpunkten N und S (Fig. 69) der Endseiten des Elementes konzentriert sind. Die Punkte N und S liegen in der Richtung von J im Abstand l von einander; die Masse dm genügt der Bedingung $dm = Jda$ oder $d\mathfrak{M} = ldm$. Wir bezeichnen mit r bezw. r_1 die Entfernungen (die wir endlich voraussetzen) eines beliebigen Punktes P von den Polen N und S, mit Θ den Winkel, den die Gerade PS mit der Richtung der Magnetisierung bildet.

Nach der allgemeinen Formel (2) [62]

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

besteht der Wert des Potentials in P aus zwei Gliedern, deren eines der in N vorhandenen positiven Masse dm, das andere der in S vorhandenen negativen Masse $-dm$ entspricht; man erhält daher

$$V = \frac{dm}{r} - \frac{dm}{r_1} = dm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

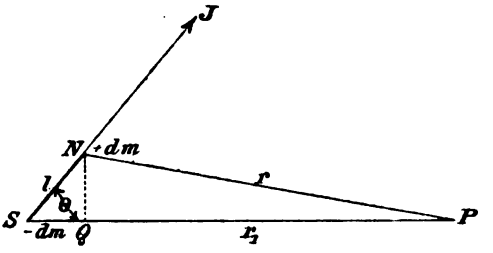

Fig. 69.

Wenn man nun um P als Zentrum mit dem Radius PN einen Kreisbogen NQ schlägt, so fällt dieser, da er unendlich klein ist, mit dem von N auf SP gefällten Lot zusammen; es entsteht dadurch das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck SNQ, worin $SQ = l\cos\Theta$ ist. Man hat daher

$$r_1 = PS = PQ + QS = r + l\cos\Theta$$

und, indem man diesen Wert in den Ausdruck von V einsetzt,

$$V = dm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + l\cos\Theta}\right)$$

oder auch, weil l gegen r verschwindend klein ist,

$$V = \frac{l\,dm\cos\Theta}{r^2} = \frac{d\mathfrak{M}\cos\Theta}{r^2}. \tag{11}$$

Der Wert des in einem Punkte von einem Elementarmagneten hervorgebrachten Potentials hängt demnach nur von dem magnetischen Moment, von der Richtung der Magnetisierung und von der Entfernung des Punktes vom Magneten selbst ab. Derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem Θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, d. h. je nachdem der betrachtete Punkt dem Nord- oder dem Südpol des Elementarmagneten näher ist.

Wenn man $d\mathfrak{M}$ durch seinen Wert $J dv$ ersetzt, so wird der Ausdruck des Potentials

$$V = \frac{J\cos\Theta\,dv}{r^2}. \tag{11'}$$

Ist ein beliebiges System von Magneten gegeben, so ist das von demselben in einem äusseren Punkte hervorgebrachte Potential die Summe der Potentiale, welche von den die einzelnen Magnete bildenden Elementarmagneten herrühren; es ist daher für ein beliebiges System von Magneten

$$V = \int \frac{J\cos\Theta}{r^2}\,dv, \tag{12}$$

wobei sich das Integral über das ganze von den Magneten eingenommene Volumen erstreckt.

Wenn man auf diese Weise die Werte des Potentials berechnet hat, wird man leicht die Werte der Kraft in den einzelnen Punkten und folglich die Energie des Systems ermitteln können. Das Feld ist somit hinreichend charakterisiert.

76. Das von einem einfachen magnetischen Blatte erzeugte Feld. — Betrachten wir ein einfaches magnetisches Blatt, auf welchem die Potenz den konstanten Wert $\mathfrak{P} = nJ$ besitzt; die Massen von freiem Magnetismus reduzieren sich auf zwei entgegengesetzt gleiche [73], die eine, positive, auf der Nordseite AA (Fig. 70) und die andere, negative, auf der Südseite BB.

Auf der positiven Seite nehmen wir ein Flächenelement aa von dem Oberflächeninhalt dS, wo die Dicke des Blattes n und die Stärke der Magnetisierung J ist. Ein durch die Begrenzung aa gelegter Zylinder, dessen Mantellinie senkrecht zum Blatte, d. h. parallel zu der Magnetisierung ist, schneidet auf der Seite BB ein Flächenelement $bb = dS$ aus. Dadurch wird einer der das Blatt bildenden Elementarmagnete abgesondert. Auf den beiden Seiten des Elementes hat man entgegengesetzt gleiche magnetische Massen vom absoluten Werte $dm = JdS$, die in den Mittelpunkten der Seitenflächen selbst im Abstande n von einander konzentriert gedacht werden können; das magnetische Moment des Elements ist daher

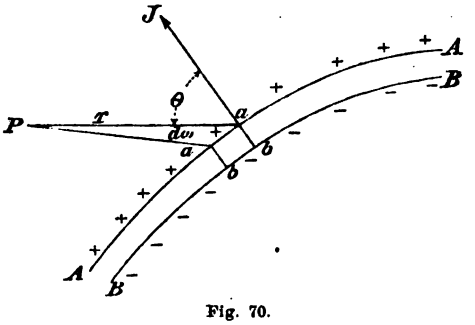

Fig. 70.

$$d\mathfrak{M} = ndm = nJdS = \mathfrak{P}dS,$$

woraus sich ergiebt:

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{M}}{dS}. \tag{13}$$

Aus dieser Beziehung geht eine wichtige Bedeutung der magnetischen Potenz hervor:

Die magnetische Potenz in einem gegebenen Punkte eines magnetischen Blattes ist der Wert des magnetischen Momentes, auf die Flächeneinheit bezogen.

Wenn man einen Punkt P in der Entfernung r von dem Element aa betrachtet und mit Θ den von der Geraden Pa mit der Richtung

von J eingeschlossenen Winkel bezeichnet, so ist nach der Formel (11) das von dem Element herrührende Potential in P

$$V = \frac{d\mathfrak{M}\cos\Theta}{r^2} = \mathfrak{P}\frac{dS\cos\Theta}{r^2}.$$

Nun hat der Ausdruck $\frac{dS\cos\Theta}{r^2}$ eine bemerkenswerte geometrische Bedeutung [22]; es ist der Raumwinkel $d\omega$, unter welchem das Flächenelement dS vom Punkte P aus gesehen wird, oder die scheinbare Flächengrösse $d\omega$ des Elementes dS, von P aus gesehen. Den Ausdruck des Potentials kann man also unter die Form bringen

$$V = \mathfrak{P}d\omega. \tag{14}$$

Das von dem Element herrührende Potential ist positiv oder negativ, je nachdem Θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, d. h. je nachdem man von dem betreffenden Punkte aus an der betrachteten Stelle auf die Nord- oder die Südseite sieht.

Wir haben so den Teil des Potentials berechnet, welcher von dem Element dS herrührt. Das Potential, das von dem ganzen Blatte hervorgerufen wird, ist die Summe der von den einzelnen Elementen herrührenden Potentiale; es ist also gleich dem Produkte aus der Konstanten $\mathfrak{P}$ und der Summe der scheinbaren Flächeninhalte $d\omega$. Wenn wir diese Summe, d. h. den scheinbaren Flächeninhalt des ganzen Blattes, vom Punkte P aus gesehen, mit dem Buchstaben ω bezeichnen, so wird das Potential in P, abgesehen von einer willkürlichen Konstanten, durch die Formel

$$V = \mathfrak{P}\omega \tag{15}$$

ausgedrückt.

Bei der Berechnung des Raumwinkels ω muss man die Teile des Blattes, von welchen die positive Seite von P aus gesehen wird, von den Teilen, von welchen die negative Seite von P aus gesehen wird, unterscheiden, die scheinbaren Grössen der ersten als positiv, die der anderen als negativ in Ansatz bringen und die algebraische Summe bilden.

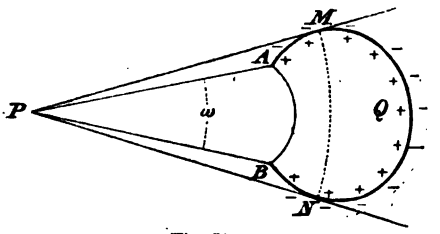

Fig. 71.

So muss man z. B. bei Figur 71 als positiv den ganzen Raumwinkel des dem Blatte tangentialen Kegels PMN annehmen, in welchem man von P aus den Teil MQN der positiven Seite sieht; von diesem muss man dann den Raumwinkel abziehen, welcher dem zwischen den Kegelmänteln PMN und PAB eingeschlossenen Raume entspricht, weil man in diesem Raume von

P aus den ringförmigen Teil $AMBN$ der negativen Seite sieht. Was übrig bleibt, ist der Raumwinkel des Kegels PAB, welcher die Begrenzung AB des magnetischen Blattes als Direktrix hat. Dieses Beispiel giebt uns eine sehr einfache Regel an die Hand, um in jedem Falle ohne Subtraktionen den Wert und das Vorzeichen von ω bestimmen zu können: der Raumwinkel ω, den man in die Formel (15) einsetzen soll, ist derjenige des Kegels mit der Spitze in P, welcher die Begrenzung des magnetischen Blattes als Direktrix hat. Das Vorzeichen von ω ist das Vorzeichen derjenigen Seite, die man in diesem Kegel sieht.

Das Potential hängt nicht von der Form und den Dimensionen des Blattes, sondern nur von dessen Potenz und dessen Begrenzung ab. Alle unendlich viele magnetische Blätter, die gleiche Potenz und gleiche Begrenzung haben, bringen in einem Punkte Potentiale hervor, die denselben absoluten Wert haben; das Vorzeichen des Potentials hängt hierbei nur von der Richtung der Magnetisierung ab.

Betrachten wir ein in sich geschlossenes magnetisches Blatt; der Raumwinkel, unter welchem die Begrenzung gesehen wird, ist gleich Null für einen Punkt ausserhalb und gleich 4π für einen Punkt innerhalb des vom Blatte eingeschlossenen Raumes; ein geschlossenes magnetisches Blatt bringt ein konstantes Potential $V = \pm 4\pi\mathfrak{P}$ in jedem innerhalb, und ein Potential, das ebenfalls konstant, jedoch gleich Null ist, in jedem ausserhalb jenes Raumes gelegenen Punkte hervor.

Da das Potential konstant ist, ist sein Differentialquotient und folglich die magnetische Kraft gleich Null.

Wenn wir ein mit ebenen und parallelen Seiten versehenes Blatt betrachten, so haben wir in einem der Nordseite unendlich nahe und von der Umrandung weit entfernt gelegenen Punkte P (Fig. 72) $\omega = 2\pi$ und daher

$$V = 2\pi\mathfrak{P};$$

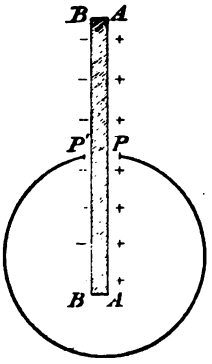

Fig. 72.

in einem bei der Südseite symmetrisch zu P liegenden Punkte P' hat das Potential dagegen den Wert

$$V' = -2\pi\mathfrak{P}.$$

Zwischen den beiden Punkten P und P' besteht also eine Potentialdifferenz

$$V - V' = 4\pi\mathfrak{P}.$$

Dies sagt uns, dass die Kräfte des Feldes während des Überganges der magnetischen Einheitsmasse von P bis P' längs einer beliebigen Linie PMP', welche ganz ausserhalb des Blattes liegt, eine Arbeit $4\pi\mathfrak{P}$ leisten; eine gleiche Arbeit muss von äusseren Kräften verrichtet werden, wenn man die Ein-

heitsmasse von P' wieder zum Punkte P zurückbringen will, ohne durch das Blatt hindurchzugehen.

Man betrachte ein einfaches magnetisches Blatt von der Potenz $\mathfrak{P}$; V sei das von ihm herrührende Potential in einem Punkte P. Wenn in diesem Punkte eine nordmagnetische Masse m konzentriert ist, und wir diese in dem vom Blatte erzeugten Felde oder, was dasselbe ist, das Blatt in dem von der Masse erzeugten Felde beweglich ansehen, so ist die Energie des Systems [21]

$$W = mV = m\mathfrak{P}\omega.$$

Wenn mehrere magnetische Massen, anstatt einer einzigen Masse m, im Felde des Blattes vorhanden sind, so ist die Energie durch

$$W = \sum \mathfrak{P} m\omega,$$

oder, weil $\mathfrak{P}$ konstant ist, durch

$$W = \mathfrak{P} \sum m\omega$$

gegeben, wobei die Summe über alle magnetische Massen m ausgedehnt ist. Nun ist $m\omega$ [22] der von der magnetischen Masse m hervorgebrachte Kraftfluss durch die Fläche des Blattes; wenn wir durch Φ den gesamten von den magnetischen Massen des Feldes hervorgebrachten Magnetisierungsfluss durch diese Fläche, d. h. die algebraische Summe der von den einzelnen magnetischen Massen erzeugten Flüsse darstellen, indem wir die auf der Nordseite ankommenden Flüsse als positiv und die auf der Südseite ankommenden als negativ betrachten, so wird die Energie des Systems durch den Ausdruck

$$W = \mathfrak{P}\Phi \tag{16}$$

dargestellt.

Die potentielle Energie eines einfachen magnetischen Blattes in einem magnetischen Felde wird, abgesehen von einer Konstanten, durch das Produkt aus der Potenz des Blattes und dem Kraftflusse, der im Felde auf der Nordseite des Blattes ankommt, ausgedrückt.

Wenn das magnetische Blatt sich im Felde bewegt, so variiert die potentielle Energie mit dem Flusse Φ; wenn Φ abnimmt, so leisten die Kräfte des Feldes eine positive Arbeit auf Kosten der Energie des Systems; nimmt dagegen Φ zu, dann müssen äussere Kräfte eine Arbeit leisten, welche die potentielle Energie vermehrt. Im allgemeinen ist die Verminderung der Energie, d. h. die positive, von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit, wenn das Blatt von einer beliebigen Lage, wo der Fluss

den Wert Φ_1 besitzt, zu einer anderen übergeht, wo der Wert des Flusses Φ_2 beträgt, ausgedrückt durch

$$W_1 - W_2 = \mathfrak{H}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Wenn das Blatt sich selbst überlassen wird, wenn es also frei beweglich ist, dann verschieben die Feldkräfte dasselbe derart, dass sie eine positive Arbeit leisten; dadurch nimmt die Energie des Systems und ebenso der Fluss Φ ab. Das Blatt sucht eine Lage stabilen Gleichgewichtes anzunehmen, welcher ein Minimum der potentiellen Energie, d. h. ein Maximum des negativen Wertes des Flusses entspricht; eine weitere Verschiebung des Blattes kann ohne Aufwand einer von äusseren Kräften verrichteten Arbeit nicht mehr eintreten. So stellt sich z. B. im erdmagnetischen Felde ein zuvor vertikal angeordnetes ebenes Blatt, das sich um eine vertikale Achse frei zu drehen vermag, senkrecht zu der magnetischen Meridianebene, mit der Südseite nach dem geographischen Südpol gewendet; in dieser Lage kommen alle Flusslinien auf der Südseite an.

§ 3.

Kräfte im Innern eines Magneten. Magnetische Induktion.

77. Magnetisches Feld im Innern der Magnete. — Die im vorigen Paragraphen enthaltenen Erörterungen über die Konstitution der Magnete und die Verteilung des Magnetismus in denselben haben uns gezeigt, wie man ein von gegebenen Magneten erzeugtes Feld studieren kann, in dessen sämtlichen Punkten die Richtung und die Intensität der Magnetisierung bekannt sind. Wir werden sehen, wie man durch elektrische Ströme magnetische Felder ohne Magnete und magnetische Massen erzeugen kann, und werden untersuchen, wie man die Feldstärke berechnet, wenn die Stromstärken und die Form der Strombahnen gegeben sind. Wir werden dann imstande sein, die magnetischen Felder in jeder Weise zu untersuchen und jedes Problem in bezug auf die Verteilung der magnetischen Massen, auf die Werte der Kräfte und des Potentials in den einzelnen Punkten, und auf die Arbeit und die Energie des Systems zu lösen.

Dies gilt so lange, wie wir von dem magnetischen Felde reden, welches ausserhalb der Magnete liegt, so lange wir nämlich in der Luft oder allgemein in einem uns zugänglichen Medium bleiben. In der That setzt schon die Definition der magnetischen Kraft in einem Punkte voraus, dass man experimentell in diesem Punkte die Einheit der magnetischen Masse anbringen könne. Wenn wir daher einer experimentellen

Prüfung unzugängliche und im besonderen innerhalb der Magnete gelegene Punkte ins Auge fassen, so hören die für die Felder in der Luft gegebenen Definitionen und Sätze auf, eine durch das Experiment wahrnehmbar zu machende Bedeutung zu haben, und es wird nötig, hier neue besondere Vereinbarungen zu treffen. Das Übereinkommen, das am nächsten liegt, besteht darin, dass man auch auf den Raum innerhalb der Magnete die Definitionen ausdehnt, die für den Raum ausserhalb der Magnete gelten. Von dem Newton'schen Begriffe der Massen eines beliebigen Agens ausgehend, liegt die Annahme nahe, dass die Kraft nicht von der Natur der Substanz in dem Punkte, sondern nur von der Verteilung der magnetischen Massen oder der elektrischen Ströme, die das Feld erzeugen, abhängt. Wir denken uns vornehmlich die vorhandene Materie in ihrer Ausdehnung durch Luft ersetzt und nehmen ferner an, dass die magnetischen Massen und die elektrischen Ströme durch diesen Ersatz nicht verändert werden, d. h. dass die magnetischen Massen und elektrischen Ströme unabhängig von ihren materiellen Trägern bestehen. Unter diesen Voraussetzungen können wir sagen:

Magnetische Kraft oder *Feldstärke* in einem der Prüfung durch die Einheit der magnetischen Masse unzugänglichen und im besonderen in einem innerhalb eines Magneten gelegenen Punkte ist die Kraft, die in demselben auf die dort befindlich gedachte magnetische Einheitsmasse wirken würde, wenn man die in jenem Punkte vorhandene Materie durch Luft ersetzen könnte, ohne die Verteilung der magnetischen Massen und der elektrischen Ströme im Raume zu verändern.

Die soeben gegebene Definition ist abstrakt, aber mathematisch genau. Wenn wir uns auf den Fall von magnetischen Feldern beschränken, welche von Magneten herrühren, und wenn die Verteilung der magnetischen Massen oder des Vektors J gegeben ist, so werden wir die Kraft in jedem Punkte des Feldes jeweilig berechnen können, welcher Art die Materie, die sich in dem betrachteten Punkte befindet, auch sei. Obwohl die magnetische Kraft auf diese Weise überall mit Genauigkeit definiert ist, wird sie doch in den Punkten innerhalb der Magnete durch Untersuchung mit einer Prüfmasse praktisch nicht gemessen werden können. In der That ist es nötig, um in einen innerhalb eines Magneten gelegenen Punkt einen magnetischen Einheitspol bringen zu können, im Magneten selbst um den betrachteten Punkt eine Höhlung herzustellen. Es ist wohl richtig, dass die auf diese Weise entfernte magnetische Masse gleich Null ist, weil das abgetrennte Stück für sich einen vollständigen Magneten bildet, aber auf der Fläche der Höhlung zeigt sich jetzt eine Verteilung von freiem Magnetismus, welche vorher von einer entgegengesetzt gleichen Verteilung auf der Oberfläche des entfernten Stückes aufgehoben wurde.

Indessen ist die Kraft, die in der Höhlung auf die Prüfmasse wirkt, nicht die Feldstärke, wie wir sie definiert haben, sondern die Resultante aus der letzteren und der Kraft, welche von den magnetischen Massen herrührt, die durch die Herstellung der Höhlung frei geworden sind.

Aus der gegebenen Definition ergiebt sich, dass die magnetische Kraft in jedem Punkte des Feldes eine Newton'sche Kraft ist; wir können daher auch auf das Innere der Magnete alle Sätze, die wir allgemein über die Newton'schen Felder aufgestellt haben, ausdehnen, d. h. wir werden keinen Unterschied zwischen dem Innern und Äussern der Magnete machen; wir werden z. B. auf einen beliebigen Teil des Raumes ohne weiteres die Theoreme von Gauss und Stokes anwenden können.

Aus den Eigentümlichkeiten des Newton'schen Feldes selbst ergiebt sich sofort, dass die magnetische Kraft nicht allgemein solenoidische Verteilung haben kann, weil der Kraftfluss, welcher aus einer geschlossenen, in ihrem Innern eine von Null verschiedene Anzahl von magnetischen Massen enthaltenden und sonst beliebigen Fläche austritt, nicht Null ist. Aber noch mehr, die magnetische Kraft ist nicht nur nicht solenoidisch verteilt, sondern auch nicht stetig; und zwar sind die Oberflächen der Magnete immer dann singuläre Flächen, wenn die zu der Oberfläche senkrechte Komponente der Magnetisierung nicht Null ist.

SS sei (Fig. 73) die Trennungsfläche zwischen einem Magneten und der Luft. Betrachten wir zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte P und P', von denen der erste innerhalb, der zweite ausserhalb des Magneten liegt. Es seien bezw. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ die Werte der magnetischen Kraft in P und P'; $\mathfrak{H}_n$ und $\mathfrak{H}_n'$ ihre Komponenten nach der Normalen zu der Fläche SS, und zwar als positiv angenommen, wenn sie vom Magneten nach aussen gerichtet sind. Auf der Fläche SS betrachten wir ein zwischen den Punkten P und P' liegendes Element AB von der Flächengrösse dS und setzen wir voraus, dass die Entfernungen der Punkte P und P' von dem Element im Vergleiche mit den Dimensionen von dS verschwindend klein sind. Auf der Fläche dS ist eine Masse von freiem Magnetismus $dm = \sigma dS = J_n dS$ verteilt.

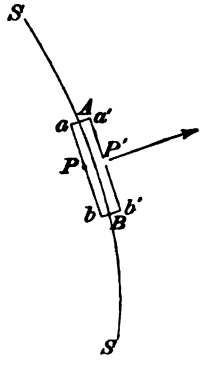

Fig. 73.

Wenden wir auf die geschlossene Fläche, die von den durch P und P' parallel zu dS gelegten Ebenen und von der durch die Begrenzung AB senkrecht zu dS beschriebenen zylindrischen Fläche gebildet ist, das Gauss'sche Theorem an. Der aus der Seitenfläche des Zylinders $aa'bb'$ austretende Fluss ist unendlich klein und kann gegen die Flüsse $\mathfrak{H}_n' dS$

und $-\mathfrak{H}_n dS$, die bezw. aus den Grundflächen $a'b'$ und ab austreten, vernachlässigt werden. Der Satz von Gauss giebt uns alsdann

$$(\mathfrak{H}_n' - \mathfrak{H}_n)\, dS = 4\pi k dm = 4\pi k J_n dS,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H}_n' - \mathfrak{H}_n = 4\pi k J_n$$

und

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi k J_n. \tag{17}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die magnetische Kraft in den beiden einander unendlich nahe gelegenen Punkten P und P' verschiedene Werte besitzt und für gewisse Werte von J sogar entgegengesetzte Richtungen haben kann. Die Oberflächen der Magnete sind also immer singuläre Flächen, wenn auf denselben eine Verteilung von freiem Magnetismus vorhanden ist, d. h. wenn die Normalkomponente der Magnetisierung nicht Null ist. Die Kraftlinien im Innern der Magnete sind nicht die Verlängerungen der äusseren Kraftlinien; während die Zahl der auf die Flächeneinheit kommenden Kraftlinien ausserhalb des Magneten $\mathfrak{H}'$ beträgt, ist sie innerhalb desselben $\mathfrak{H}$.

Dieselbe Beziehung (17) lässt uns ersehen, dass die beiden Vektoren $\mathfrak{H}$ und J, vom physikalischen Standpunkte aus betrachtet, Grössen von verschiedener Natur sind, eben weil der Faktor k nicht eine einfache Zahl, sondern eine physikalische Grösse ist. Nur in dem Masssystem, in welchem k als eine einfache Zahl angesehen wird, werden $\mathfrak{H}$ und J homogene Grössen d. h. Grössen von gleicher physikalischer Dimension, weil man dann, indem man k gleich der Einheit setzt, zu der Gleichung gelangt:

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi J_n; \tag{17'}$$

dies ist aber lediglich eine von uns gemachte Annahme.

78. Vektoren mit solenoidischer und stetiger Verteilung. — Die beiden Vektoren, die wir bis jetzt in den magnetischen Feldern betrachtet haben, d. h. die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die Magnetisierung J besitzen eine solenoidische und stetige Verteilung nur dort, wo keine freien magnetischen Massen existieren. Das weitere Studium der magnetischen Felder wird sich einfacher gestalten, wenn es gelingt, durch zweckentsprechende Kombination beider Vektoren einen Vektor zu finden, welcher stetig und solenoidisch in dem ganzen Felde verteilt ist.

Wir betrachten eine geschlossene, im magnetischen Felde in bezug auf die Magnete beliebig gelegene Fläche S und bezeichnen mit m die Menge von freiem Magnetismus, die innerhalb dieser Fläche enthalten ist,

und mit Φ_h bezw. Φ_i den Kraft- bezw. den Magnetisierungsfluss, welcher aus derselben austritt. Nach dem Gauss'schen Satze hat man dann

$$\Phi_h = 4\pi k m;$$

und weil die Masse, die innerhalb einer geschlossenen Fläche enthalten ist, gleich dem in sie eintretenden Flusse von J ist [74], gilt auch

$$\Phi_i = -m.$$

Der aus S austretende Fluss des Vektors $4\pi k J$, den man erhält, indem man J mit dem Skalarfaktor $4\pi k$ multipliziert, ist

$$4\pi k \Phi_i = -4\pi k m,$$

und der Fluss des aus den beiden Vektoren $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierenden Vektors ist gleich Null:

$$4\pi k \Phi_i + \Phi_h = -4\pi k m + 4\pi k m = 0,$$

und dies ist der Fall, wie auch immer die Fläche S beschaffen und gelegen sei. Dieser resultierende Vektor hat also solenoidische und folglich stetige Verteilung im ganzen Raume. Die Flussröhren und -linien schliessen sich in sich selbst zusammen in endlicher oder unendlicher Entfernung; sie bieten keine Singularität, auch nicht auf der Oberfläche der Magnete, und sind von konstantem Flusse durchsetzt. Diese Eigenschaften gelten nicht nur für den aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierenden Vektor, sondern auch für jeden anderen, den man aus ihm dadurch ermitteln kann, dass man ihn mit einer beliebigen skalaren Konstanten multipliziert.

Dieser Skalarfaktor kann anstatt einer Zahl, eine physikalische Grösse mit gewissen Dimensionen sein; man wird ihn immer so wählen können, dass der solenoidische und stetige Vektor vorausbestimmte physikalische Dimensionen erhält.

Unter allen diesen Vektoren verdienen zwei besondere Beachtung; und zwar der *aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resulticrende Vektor* $\mathfrak{B}$ und der *aus $\frac{\mathfrak{H}}{k}$ und $4\pi J$ resultirerende Vektor* $\mathfrak{B}$, welche ermittelt werden, indem man den konstanten Faktor bezw. gleich 1 und $\frac{1}{k}$ setzt.

79. Polare und elektromagnetische Definition der magnetischen Kraft. Kräfte im Innern von Höhlungen in Magneten. — Betrachten wir zuerst den aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierenden Vektor $\mathfrak{B}$, welcher, wie ja aus seiner Definition hervorgeht, eine Grösse derselben Natur wie die magnetischen Kräfte ist.

Um zu einer physikalischen Deutung des Vektors $\mathfrak{B}$ zu gelangen, ist es erforderlich, dass wir den Wert der Kraft in einem Punkte einer

Höhlung im Innern eines Magneten berechnen, einer Kraft, die, wie schon bemerkt, in jenem Punkte von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ verschieden ist.

In einem Magneten denken wir uns eine zylindrische Höhlung $ABCD$ (Fig. 74) hergestellt, deren Basis kreisförmig sei, und deren Achse in der Richtung der Magnetisierung liege. Nehmen wir an, die Höhlung sei so klein, dass die Magnetisierung in allen Punkten des entfernten Stückes und der Fläche der Höhlung als konstant der Grösse und Richtung nach angesehen werden kann, und setzen wir ferner voraus, dass die Höhlung gemacht worden sei, ohne die Verteilung der Magnetisierung in den anderen Teilen des Magneten im geringsten zu verändern.

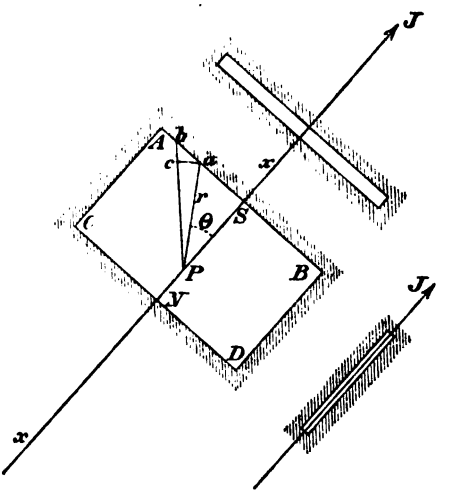

Fig. 74.

Man hat auf diese Weise auf den beiden Grundflächen des Zylinders gleiche und ungleichnamige Verteilungen, eine nordmagnetische auf CD, eine südmagnetische auf AB, frei gemacht, welche nach den gemachten Voraussetzungen konstante Dichte $\sigma = J$ besitzen.

Wenn wir die magnetische Masse *Eins* in einem auf der Achse xx der Höhlung gelegenen Punkte P betrachten, so ist die Kraft, deren Wirkung diese Masse ausgesetzt ist, die Resultierende aus zwei anderen Kräften, nämlich aus der Kraft $\mathfrak{H}$, die von den vor der Bildung der Höhlung vorhanden gewesenen magnetischen Massen oder elektrischen Strömen herrührt, und aus der Kraft R, welche aus der neuen Verteilung auf den beiden Seiten hervorgeht. Die Kraft R soll nach der Achse xx von N nach S gerichtet sein. Um sie zu berechnen, betrachten wir zuerst eine der Grundflächen, AB. Ein beliebiges Element ab derselben vom Inhalte dS in der Entfernung r von P enthält eine Masse $\sigma dS = JdS$, welche in P eine Kraft $= k\frac{JdS}{r^2}$ ausübt. Die Kraft in P, die von allen auf der Seite AB verteilten Massen herrührt, ist die Resultierende der von den einzelnen Elementen herrührenden Kräfte; und da wir wissen, dass die Resultante nach der Achse xx gerichtet ist, wird es genügen, die Projektionen der einzelnen Komponenten auf die Richtung xx zu betrachten und sie algebraisch zu addieren. Die auf diese Weise gebildete Komponente der Kraft, die vom Element ab herrührt, ist

$$k\frac{JdS}{r^2}\cos\Theta = kJd\omega,$$

worin $d\omega$ den scheinbaren Flächeninhalt von dS, vom Punkte P aus gesehen [22], bedeutet. Wenn wir die Summe aller dieser Elementarkomponenten bilden und mit $\omega = \int d\omega$ den scheinbaren Flächeninhalt von AB, von P aus gesehen, bezeichnen, so ist die in P von den auf AB verteilten Massen erzeugte Kraft $kJ\omega$.

Analog greifen die auf CD verteilten Massen die Einheitsmasse in P mit einer Kraft $kJ\omega'$ an, wenn man mit ω' den Raumwinkel, unter welchem die Basis CD vom Punkte P aus gesehen wird, bezeichnet. Im ganzen also ist die Kraft R durch

$$R = kJ(\omega + \omega')$$

ausgedrückt.

Wenn im besonderen der Punkt P sich im Mittelpunkte der Achse befindet, so ist $\omega = \omega'$ und folglich

$$R = 2kJ\omega,$$

und es ist leicht zu beweisen, dass, wenn a der Durchmesser der Basis des Zylinders und h dessen Höhe ist, die Beziehung besteht:

$$R = 4\pi kJ\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}}\right].$$

Im allgemeinen hängt der Wert der Kraft R von den Raumwinkeln der beiden Kegel ab, welche den Punkt P als Spitze haben und die Grundflächen des Zylinders umschreiben, d. h. von dem Verhältnisse $\frac{a}{h}$ des Durchmessers der Basis zur Höhe des Zylinders.

Zwei Grenzfälle sind besonders wichtig, nämlich der, dass der Quotient $\frac{a}{h}$ unendlich klein, und jener, dass dieser Quotient unendlich gross ist.

Der erste Fall entspricht einem kleinen, parallel zur Richtung der Magnetisierung gelegenen Hohlzylinder mit einer im Vergleich zur Höhe verschwindend kleinen Basis. Man hat dann $\omega = \omega' = 0$, daher $R = 0$; die Kraft reduziert sich auf diejenige, die man in dem Punkte hätte, wenn keine Höhlung hergestellt worden wäre, d. h. auf die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ in jenem Punkte.

Wenn die Höhlung unendlich dünn ist, so gilt das Gesagte auch dann, wenn sie nicht zylindrisch ist, weil sie immer als aus zylindrischen Teilen bestehend angesehen werden kann. Wenn man sich daher im Magneten einen kleinen Kanal längs einer Flussröhre denkt, so würde in jedem seiner Punkte die zur Prüfung der Magnetisierungsverhältnisse eingebrachte

magnetische Masse *Eins* von einer Kraft angegriffen werden, welche gleich der magnetischen Kraft in dem Punkte ist. Es geht daraus eine weniger abstrakte Definition der magnetischen Feldstärke im Innern der Magnete hervor:

Intensität des magnetischen Feldes oder magnetische Kraft in einem Punkte im Innern der Magnete ist die Kraft, die in diesem Punkte auf die Einheit der magnetischen Masse wirkt, wenn sich durch den Punkt ein unendlich dünner Kanal längs einer Magnetisierungslinie hinzieht.

Der zweite Grenzfall, bei welchem der Quotient $\frac{a}{h}$ unendlich gross ist, entspricht einem Zylinder mit einer im Vergleich zum Durchmesser der Grundfläche verschwindend kleinen Höhe. Der Hohlraum ist jetzt eine unendlich dünne, tellerförmige Aussparung, senkrecht zur Richtung der Magnetisierung. In diesem Falle hat man $\omega = \omega' = 2\pi$ und

$$R = 4\pi k J. \tag{18}$$

Die Kraft R stellt also den zweiten Vektor dar, welcher als Komponente von $\mathfrak{B}$ auftritt.

Indessen stellt uns der Vektor $\mathfrak{B}$, der aus $\mathfrak{H}$ und R resultiert (d. h. aus der Kraft, die von den vorherbestehenden magnetischen Massen oder elektrischen Strömen und aus der Kraft, die von den beiden entgegengesetzt gleichen Verteilungen, die auf den Grundflächen der Höhlung zu Tage treten, herrührt), die Kraft dar, welche auf die Einheit der magnetischen Masse wirken würde, wenn letztere in einen Punkt im Innern einer unendlich dünnen, im Magneten befindlichen, senkrecht zur Magnetisierung gerichteten Höhlung gebracht wäre.

Weil der auf Teilen des Umfangs der Grundfläche vorhandene Magnetismus auf einen Punkt der Achse eine im Vergleich zu derjenigen, mit welcher der in den Zentralteilen vorhandene Magnetismus wirkt, verschwindend kleine Kraft ausübt, so leuchtet es ein, dass die Kraft auch dann noch dieselbe bleibt, wenn die Grundflächen nicht kreisförmig, sondern beliebig gestaltet sind, unter der einzigen Bedingung, dass ihre Dimensionen gegen die Höhe des Zylinders unendlich gross sind.

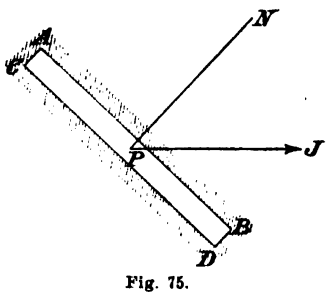

Fig. 75.

Wir können diese Aussage verallgemeinern und beweisen, dass die Komponente des Vektors nach einer beliebigen Richtung PN (Fig. 75) gleich der nach PN gebildeten Komponenten derjenigen Kraft ist, die auf die magnetische Einheitsmasse in einer senkrecht zu PN

ausgesparten, unendlich dünnen Höhlung $ABCD$ wirken würde. In der That üben die Massen von freiem Magnetismus, die auf der zylindrischen Fläche der Höhlung vorhanden sind, wenn die Höhe der letzteren gegen die Basis derselben verschwindend klein ist, auf den Punkt P Kräfte aus, die unendlich klein sind im Vergleich zu denjenigen, die von den auf den Grundflächen verteilten Massen herrühren. Deswegen reduziert sich die Kraft, die in P von den auf der Fläche der Höhlung verteilten Massen herrührt, auf diejenige, die von den beiden entgegengesetzt gleichen Verteilungen auf den Grundflächen hervorgebracht wird; sie wird berechnet auf dieselbe Weise, wie vorher die Kraft R bestimmt wurde. Diese Kraft ist also nach PN gerichtet und besitzt den Wert

$$4\pi k J_n,$$

wobei mit J_n die Dichte des freien Magnetismus auf den Grundflächen, d. h. die Komponente der Magnetisierung nach PN bezeichnet wird.

Wenn wir mit $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_n$ die magnetische Kraft in P und ihre Projektion auf PN bezeichnen, so ist die Kraft, die im Punkte P der Höhlung auf die magnetische Einheitsmasse wirkt, die Resultierende aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J_n$. Ihre Komponente nach PN ist

$$\mathfrak{H}_n + 4\pi k J_n;$$

dieser Ausdruck stellt auch die Projektion der Resultierenden aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$, d. h. des Vektors $\mathfrak{B}$ auf dieselbe Richtung PN dar; und dies ist es, was wir beweisen wollten.

Der Vektor $\mathfrak{B}$ ist also eine Kraft, welche in jedem Punkte eines magnetischen Feldes existiert und dort solenoidisch verteilt ist. In der Luft, oder allgemein in dem von Magneten nicht eingenommenen Raume, wo $J = 0$ ist, fällt die Kraft $\mathfrak{B}$ mit der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ zusammen; in dem Raume im Innern der Magnete dagegen ist sie gleich der Kraft, welche auf die Einheit der magnetischen Masse wirken würde, wenn wir sie als in einer unendlich dünnen, im Magneten senkrecht zur Richtung der Magnetisierung hergestellten Höhlung gelegen annehmen. Die Komponente der Kraft $\mathfrak{B}$ nach einer beliebigen Richtung ist gleich der gleichgerichteten Komponenten der Kraft, welche auf die Einheitsmasse in einer im Magneten senkrecht zu der betrachteten Richtung angebrachten Höhlung wirken würde.

Man muss die beiden Kräfte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ genau unterscheiden. Nur ausserhalb der Magnete fallen beide Kräfte zusammen, innerhalb derselben aber sind sie ganz verschieden. Die Kraft $\mathfrak{H}$ ist nicht solenoidisch verteilt; ihre Flusslinien sind niemals geschlossene Linien.

Setzen wir einmal voraus, wir hätten in solchem Falle eine geschlossene Kraftlinie, so würde es, um einen apagogischen Beweis zu

führen, genügen, im Magneten einen dünnen Kanal längs derselben auszuhöhlen und eine z. B. nordmagnetische Masse so anzuordnen, dass sie auf der kontinuierlichen, geschlossenen Linie kreisen könnte. Dann würde diese Masse in jedem Punkte der Linie von einer Kraft angegriffen werden, welche das Bestreben hätte, sie immer in demselben Sinne anzutreiben. Indem man sie zirkulieren liesse, würde die Kraft für alle Elemente der Linie immer eine positive Arbeit leisten; man würde so aus den magnetischen Kräften eine kontinuierliche Arbeit gewinnen, ohne dass andererseits entsprechend Arbeit aufgewendet würde. Dies ist aber unmöglich. Wir werden allerdings sehen, dass durch elektrische Ströme magnetische Felder erzeugt werden, in welchen die Kraftlinien geschlossen sein können; allein die elektrischen Ströme können immer nur durch Aufwand an Energie erzeugt und erhalten werden, und dann stellt die in dem oben angenommenen Beispiele fortwährend zu gewinnende Arbeit einen Teil der aufgewandten Arbeit dar.

Die Kraft $\mathfrak{B}$ hat dagegen solenoidische Verteilung im ganzen Raume; ihre Flusslinien sind geschlossene Linien. Man kann hier auch nicht in ähnlicher Weise wie vorher auf die absurde Idee eines „Perpetuum mobile" verfallen, weil es, um die Einheit der magnetischen Masse eine solche Linie durchlaufen zu lassen, nicht ausreicht, im Magneten einen kleinen Kanal längs der Linie auszuhöhlen; es wäre vielmehr nötig, im Magneten selbst der Reihe nach sehr dünne tellerförmige Höhlungen normal zur Magnetisierung herzustellen, indem man bei dem Übergang von einem Punkte zu einem anderen immer die vorige Höhlung wieder ausfüllt.

Um den wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Kräften $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ prägnant zu bezeichnen, schlug Lord Kelvin vor, die eine *die elektromagnetische* und die andere *die polare Definition der magnetischen Kraft* zu nennen.

In vielen technischen Büchern giebt man nur die polare Definition der Kraft und schreibt ihr dann die Eigenschaften der elektromagnetisch definierten Kraft zu; so spricht man oft von den Kraftlinien im Innern der Magnete, als wären dieselben die Fortsetzung der äusseren Kraftlinien und bildeten mit diesen ebenso viele geschlossene Linien. Aus den vorigen Darlegungen geht aber hervor, dass diese Darstellung nur in dem Falle richtig ist, dass man auf die polare Definition der magnetischen Kraft als einer auch im Innern der Magnete wirkenden Newton'schen Kraft verzichtet.

Wir sind auf die Betrachtung der Kraft $\mathfrak{B}$ gekommen, indem wir von der Bedingung ausgingen, dass sie solenoidische Verteilung haben soll. Man kann aber auch, von den Beziehungen ausgehend, die wir zwischen der Kraft, die in speziellen Höhlungen im Magneten auf die

Einheitsmasse wirkt, und der Kraft $\mathfrak{B}$ aufgestellt haben, direkt nachweisen, dass die Kraft $\mathfrak{B}$ solenoidische Verteilung besitzt. Es genügt dafür, zu beweisen, dass der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null ist.

Die Fälle, die auftreten können, sind drei: 1) die geschlossene Fläche befindet sich ganz in nicht magnetischen Medien ausserhalb der Magnete; 2) die geschlossene Fläche liegt ganz innerhalb eines Magneten; 3) die geschlossene Fläche ist teils im Innern der Magnete, teils ausserhalb derselben.

Erster Fall. Wenn die geschlossene Fläche S keinen Magneten durchschneidet, so fällt in jedem ihrer Punkte die Kraft $\mathfrak{B}$ mit der Kraft $\mathfrak{H}$ zusammen, und es ist der Fluss von $\mathfrak{B}$ dem Flusse von $\mathfrak{H}$ gleich; letzterer ist nach dem Satze von Gauss gleich $4\pi M$, wobei M die Summe der innerhalb der Fläche vorhandenen magnetischen Massen darstellt. Nun ist M notwendigerweise Null, weil die Fläche S, wenn sie keine Magnete schneidet, entweder keinen Magneten, oder einen oder mehrere vollständige Magnete enthält, für welche die Summe der Massen von freiem Magnetismus immer Null ist; es ist also auch der aus der Fläche austretende Fluss des Vektors $\mathfrak{B}$ stets gleich Null.

Zweiter Fall. Die geschlossene Fläche S liegt ganz innerhalb eines Magneten (Fig. 76). Innerhalb und ausserhalb der Fläche S und unendlich nahe derselben stelle man sich noch zwei geschlossene Flächen vor, und denke man sich, dass die Masse des Magneten in dem von ihnen begrenzten Raume weggenommen wird, d. h. man denke sich, dass im Magneten eine unendlich dünne Höhlung längs der Fläche S hergestellt wird. Ein kleiner Teil der Begrenzung der Höhlung kann immer als einer zur Fläche tangentialen Ebene angehörend angesehen werden; folglich ist in einem beliebigen Punkte der Fläche S die Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{B}$ gleich der Normalkomponenten der Kraft, die in dem Punkte auf die Masse *Eins* wirkt; der Fluss von $\mathfrak{B}$ ist also gleich dem Flusse dieser Kraft. Aber diese ist eine wirkliche Newton'sche Kraft; sie ist die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ des Systems der Magnete, das man erhält, nachdem man den Schnitt geführt hat: auf sie kann der Gauss'sche Satz angewandt werden. Der von S austretende Fluss dieser Kraft ist Null, weil die im Innern enthaltene Masse Null ist, da das losgetrennte Stück M ein vollständiger Magnet ist; es ist also auch der aus S austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null.

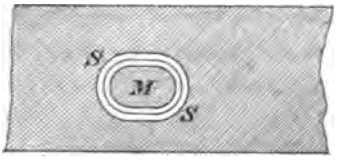

Fig. 76.

Dritter Fall. Wenn sich die Fläche S (Fig. 77) teilweise in der Luft, teilweise innerhalb der Magnete befindet, kann man in analoger Weise beweisen, dass der aus S austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null ist. Es genügt, sich in den Magneten unendlich dünne Schnitte längs der Fläche S vorzustellen. Auf diese Weise ist in jedem Punkte der Fläche die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ gleich der Normalkomponenten der Kraft, welche auf die in dem Punkte gelegene Einheitsmasse wirkt; beide Flüsse sind gleich. Der Fluss der magnetischen Kraft des neuen Systems ist nach dem Satze von Gauss gleich Null, also ist auch der Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null.

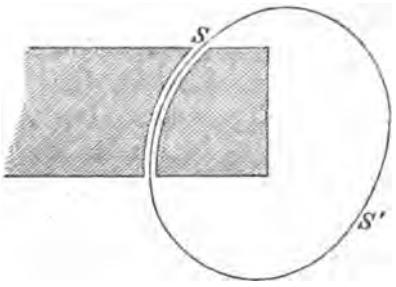

Fig. 77.

80. Magnetische Induktion. Polarisation. Verschiebung. — Der zweite Vektor mit stetiger und solenoidischer Verteilung $\mathfrak{B}$, welcher aus $\frac{\mathfrak{H}}{k}$ und $4\pi J$ resultiert, ist eine mit J physikalisch gleichartige Grösse, d. h. sie hat die Dimensionen einer Kraft dividiert durch den Faktor k. Der so definierte Vektor $\mathfrak{B}$ ist von der Kraft $\mathfrak{H}$ verschieden und heisst *magnetische Induktion;* er besitzt eine bemerkenswerte physikalische Bedeutung, für deren genaues Verständnis es notwendig ist, andere Thatsachen und Grundeigenschaften der magnetischen Felder zu erwähnen.

Bis jetzt haben wir die magnetischen Kräfte als Newton'sche, auf Massen eines bestimmten Agens in die Ferne wirkende Kräfte angesehen, und dies war natürlich, weil die bisher erwähnten Versuche uns nur die Existenz der Kräfte nachwiesen. Wenn wir nun aber an die physikalische Natur dieser Kräfte denken, werden wir zu derselben Gedankenfolge hingeleitet, zu welcher uns schon die Betrachtung der elektrischen Kräfte geführt hat, d. h. zu der Annahme, dass der Sitz der magnetischen Erscheinungen nicht nur in den Magneten, wo sich die Massen von freiem Magnetismus zeigen, sondern im ganzen Felde sei.

In der That lehrt uns die Erfahrung, dass alle Körper, die Luft und die Gase mit eingeschlossen, obwohl in viel geringerem Grade als das Eisen und die ihm verwandten Stoffe, magnetische Erscheinungen zeigen können. Es giebt nichts, was uns zu der Behauptung berechtigt, dass in einem magnetischen Felde sich nicht alle Körper magnetisieren, und es liegt nahe, anzunehmen, dass jener besondere Zustand, in welchem die Körper sich befinden, wenn wir sie als „magnetisiert" bezeichnen, für

sie alle der gleiche sei. Im Eisen ist jedes Element ein Magnet; dies ist natürlich in jedem anderen Körper vorauszusetzen.

Betrachten wir ein Element $ABCD$ (Fig. 78) eines beliebigen magnetisierten Körpers; es besitzt die Eigentümlichkeiten eines kleinen Magneten, besitzt nämlich auf den gegenüberliegenden Seiten zwei gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Massen n und s. Das ganze Feld, sowohl der von dem Magneten, wie auch der von nicht magnetischen Substanzen eingenommene Teil, kann in viele solche Elemente wie das betrachtete zerteilt gedacht werden. Wir sagen, dieser Raum sei *polarisiert*. Der Begriff *magnetische Polarisation* ist vollständig analog demjenigen der elektrischen Polarisation; beide Felder werden in unendlich kleine Elemente zerlegt gedacht, sodass dieselben an einer Seite positive, an der anderen negative Massen darbieten.

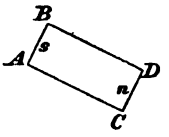

Fig. 78.

Wenn man für jedes Element die Nordmasse verschiebt, bis sie mit der Südmasse auf der gegenüberliegenden Seite des Elementes zusammenfällt, so heben sich die beiden gleichen und entgegengesetzten Massen gegenseitig auf; sie bringen keine magnetischen Kräfte mehr hervor. Wenn man nun durch diese Verschiebung die Polarisation vernichtet, d. h. jenen besonderen Zustand des Körpers aufhören lässt, der als der Zustand des „Magnetisiertseins" bezeichnet wird, so kann man füglich umgekehrt annehmen, dass die Polarisation durch eine gleiche und entgegengesetzte Verschiebung der Elemente der magnetischen Massen hervorgebracht worden sei. Wir werden so zu der Annahme geführt, dass in jedem Punkte eines unmagnetisierten Körpers gleiche, ungleichnamige Massen von Magnetismus vorhanden seien, welche sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben. Der Vorgang, durch welchen sich die Polarisation bildet, besteht in einer Verschiebung der Nordmasse gegen die Südmasse in der Richtung der Magnetisierung J; die beiden auf diese Weise frei gewordenen Massen können sich nun bemerkbar machen. Diese Wirkung erhält man jedenfalls durch die relative Verschiebung einer Masse in bezug auf die andere; man kann also für jedes Element voraussetzen, dass die Südmasse fest sei und die Nordmasse sich um eine geringe Strecke verschiebe, oder dass die Nordmasse fest sei und sich die Südmasse in der entgegengesetzten Richtung verschiebe, oder endlich, dass beide, die positive und die negative Masse, in einander entgegengesetzter Richtung fortschreiten. Die Gesamtheit dieser Massen, die wir uns in den einzelnen Elementen des Feldes dachten, bildet zwei gleiche und entgegengesetzte Verteilungen von Magnetismus. Wenn der Körper nicht magnetisiert ist, so fallen die beiden zusammen; wenn er sich polarisiert, so ergiebt sich die positive Verteilung um eine geringe Strecke gegen die negative in der Richtung von J (der Magnetisierungsrichtung) verschoben.

Man wird aber einen wesentlichen Unterschied zwischen elektrischer und magnetischer Polarisation bemerken.

In einem elektrischen Felde kann man elektrische Gleichströme haben, d. h. Verschiebungen, die immer in derselben Richtung längs geschlossener Linien stattfinden. Dagegen giebt es keine kontinuierlichen magnetischen Ströme, weil sich der Verschiebung immer elastische Gegenwirkungen entgegensetzen, welcher Art der Körper auch sei, in welchem sich die Polarisation bildet. Im wesentlichen gleicht die magnetische Polarisation der elektrischen Polarisation in den dielektrischen Körpern, aber nicht in den Konduktoren.

Durch ein zu der Richtung, nach welcher die Verschiebung stattfindet, senkrechtes, sonst beliebiges Flächenelement dS geht, während sich die Polarisation bildet, eine magnetische Menge dm hindurch. Der Vektor, dessen Tensor $\frac{dm}{dS}$ und dessen Richtung die Richtung, in welcher sich die Nordmasse verschiebt, ist, heisst *magnetische Verschiebung.*

Durch diese Betrachtungen wollen wir keine Hypothese über die physikalische Natur des Magnetismus aufstellen; wir behaupten damit nicht, dass sich in Wirklichkeit etwas verschiebt. Die Einführung des Begriffes einer durch die Verschiebung hervorgerufenen Polarisation ist vielmehr nichts anderes als eine Darstellung jenes besonderen Zustandes, welchem die magnetischen Erscheinungen ihr Dasein verdanken. Diese Darstellung eignet sich gut für eine mathematische Behandlung und stimmt mit allen Erklärungen überein, die man über die Konstitution der magnetischen Felder und die Natur des Magnetismus zu geben versucht hat. Die Maxwell'sche Theorie, die sich auf diesen Begriff aufbaut, bietet keine grössere Willkür als die Newton'sche Theorie der in die Ferne wirkenden Massen, hat aber vor letzterer den Vorzug, dass sie die Thatsache berücksichtigt, dass alle Körper magnetische Erscheinungen aufweisen.

Man hat gesehen, dass die in einer beliebigen geschlossenen Fläche enthaltene Masse von Magnetismus, gleichgiltig ob sie Magnete oder unmagnetische Körper durchsetzt, stets gleich Null ist; man kann weder Magnetismus hineinbringen, noch solchen daraus entnehmen, es ist also der Fluss der Verschiebung durch eine beliebige geschlossene Fläche gleich Null, oder:

Die magnetische Verschiebung besitzt solenoidische Verteilung.

In jedem Punkte des Raumes besteht zwischen magnetischer Kraft und magnetischer Verschiebung die Beziehung der Ursache zur Wirkung, wie zwischen elastischer Kraft und Deformation.

Betrachten wir zuerst den von Luft erfüllten Raum. Das Feld sei von zwei entgegengesetzt gleichen magnetischen Massen hervorgebracht, welche mit gleichförmiger Dichte σ auf zwei parallelen Ebenen AA und BB (Fig. 79) in einer im Vergleiche zu ihrer Ausdehnung kleinen Entfernung verteilt sind. Diese Verteilung könnte man beispielsweise erhalten, wenn man einen unendlich dünnen Schnitt normal zur Achse eines Ringmagneten herstellt, in welchem die Magnetisierung den konstanten Wert $J = \sigma$ hat. In einem Punkte dieses Feldes hat die magnetische Kraft den Wert (18)

$$\mathfrak{H} = 4\pi k\sigma.$$

Nun geht durch jede Flächeneinheit einer der Seiten des Schnittes eine Menge σ von Magnetismus; die Verschiebung ist $b = \sigma$ und folglich

$$\mathfrak{H} = 4\pi k b, \quad b = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi k}. \tag{19}$$

Dies ist die Beziehung, die zwischen den Werten der magnetischen Verschiebung und der magnetischen Kraft in einem beliebigen Punkte des mit Luft erfüllten Raumes besteht. Betrachten wir nun den Raum innerhalb der Magnete. SS (Fig. 80) sei die Trennungsfläche zwischen einem Magneten und der Luft, P und P' seien zwei Punkte, einer innerhalb, der andere ausserhalb des Magneten, einander und der Fläche S unendlich nahe. Bezeichnen wir mit b_n' und $\mathfrak{H}_n'$, b_n und $\mathfrak{H}_n$ die Werte der Normalkomponenten der magnetischen Verschiebung und der magnetischen Kraft in jenen Punkten, so ist, weil der Vektor b solenoidische Verteilung besitzt und die Punkte P und P' unendlich nahe bei einander liegen, abgesehen von unendlich kleinen Grössen:

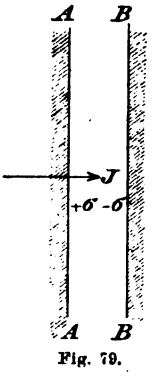

Fig. 79.

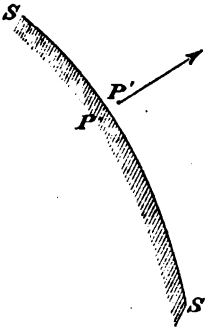

Fig. 80.

$$b_n = b_n'.$$

Nun gehen die Formeln (19) und (17) über in die folgenden:

$$b_n' = \frac{\mathfrak{H}_n'}{4\pi k},$$

und

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi k J_n,$$

woraus folgt:

$$b_n = \frac{\mathfrak{H}_n}{4\pi k} + J_n. \tag{19'}$$

Da $\mathfrak{B}$ die Resultierende aus $\frac{\mathfrak{H}}{k}$ und $4\pi J$ ist, so hat man ferner:

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{H}_n}{k} + 4\pi J_n = 4\pi b_n.$$

Dieser Gleichung kann man genügen, indem man setzt:

$$b = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}, \qquad \mathfrak{B} = 4\pi b. \tag{20}$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein, und zwar ebenso innerhalb wie ausserhalb der Magnete, weil die beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und b solenoidische Verteilung besitzen, was übrigens schon daraus hervorgeht, dass in dem unmagnetischen Raume $J = 0$, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{H}}{k}$ ist, und folglich die Gleichungen (19) und (20) gleichbedeutend sind.

Die Beziehungen (19) und (19′) führen zu einer bemerkenswerten Deutung der Magnetisierung J.

Man setze voraus, dass in zwei Punkten, von denen sich der eine im Innern eines Magneten, der andere in der Luft befindet, die Komponente der magnetischen Kraft in einer gewissen Richtung den gleichen Wert $\mathfrak{H}_n$ habe. Die Komponente der Verschiebung nach derselben Richtung hat den Wert

$$b_n = \frac{\mathfrak{H}_n}{4\pi k} + J_n$$

in dem Punkte innerhalb des Magneten und den Wert

$$b_n' = \frac{\mathfrak{H}_n}{4\pi k}$$

in der Luft. Daraus folgt durch Subtraktion

$$b_n - b_n' = J_n.$$

Die Magnetisierung stellt also die Differenz der Verschiebungen dar, die durch eine und dieselbe Kraft im Magneten und in einer unmagnetischen Substanz hervorgebracht werden.

Die Beziehung (20) weist uns darauf hin, dass b und $\mathfrak{B}$ dieselben Dimensionen besitzen, dass sie physikalisch-gleichartige Grössen sind. Die magnetische Induktion ist also eine Grösse gleicher Natur wie die Verschiebungen; sie ist keine Kraft, wie wir schon bemerkt haben, sie steht vielmehr zu der Kraft in demselben Zusammenhang wie eine Wirkung zu ihrer Ursache.

Es war notwendig, diese physikalischen Verschiedenheiten zwischen der Kraft $\mathfrak{H}$, der elektromagnetisch definierten Kraft $\mathfrak{H}$ und der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ genau hervorzuheben, auch deswegen, weil sich die beiden Beziehungen, welche die Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ definieren, wenn

man das Masssystem annimmt, für welches $k = 1$ ist, auf eine einzige reduzieren, nämlich

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} \text{ oder Resultierende aus } \mathfrak{H} \text{ und } 4\pi J.$$

Vom physikalischen Standpunkte aus ist aber eine Identität der Grössen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gar nicht vorhanden. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ sind zwei Vektoren ganz verschiedener physikalischer Natur; es ist nur eine Folge der getroffenen Wahl der Masseinheiten, dass in jedem Punkte die numerischen Werte und die Richtungen von $\mathfrak{H}$ und von $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, dass die Induktionslinien mit den Linien der elektromagnetisch definierten Kraft verschmelzen, und dass endlich die Flüsse beider Vektoren gleich sind. Dies ist besonders bei dem praktischen Ausdrucke vieler Sätze zu beachten, wie z. B. bei den folgenden:

„Die magnetische Induktion ist gleich der magnetischen Kraft innerhalb einer Höhlung im Magneten."

„Die magnetische Induktion ist gleich der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ in dem Raum ausserhalb der Magnete,"

worin die Gleichheit auf die numerischen Werte beschränkt verstanden werden muss.

Bereits nach der Auffassung von Faraday und Maxwell sind Induktion und magnetische Kraft zwei ganz verschiedene physikalische Grössen. Dies wird noch deutlicher durch die Untersuchung der magnetischen Feldenergie hervorgehoben werden. Wir werden in der That sehen [88], dass die Energie sich durch ein Volumenintegral ausdrücken lässt, und dass dieselbe in jedem Volumenelemente dem Produkte $\mathfrak{H}d\mathfrak{B}$ proportional ist; folglich kann $\mathfrak{B}$ sicher keine Kraft sein, weil die Energie nicht die physikalische Dimension des Quadrates einer Kraft hat.

81. Magnetischer Kreis. Magnetomotorische Kraft. — Die magnetische Induktion ist ein Vektor, welcher in jedem Punkte eines magnetischen Feldes existiert und solenoidische Verteilung besitzt; die Induktionslinien und -röhren schliessen sich im Endlichen oder im Unendlichen. Das magnetische Feld kann in viele Induktionsröhren zerteilt gedacht werden, in welchen der Fluss konstant ist, genau so wie der Fluss einer Flüssigkeit in beharrlichem Strömungszustand. Häufig nennt man eine Induktionsröhre einen *magnetischen Kreis*. Bei vielen Apparaten hat man ein System von magnetischen Körpern, in welchen ein Induktionsfluss stattfindet; alle oder fast alle Induktionslinien schliessen sich innerhalb des Systems:

hieraus erklärt sich die Wahl des Namens: *magnetischer Kreis.* Der magnetische Kreis wird *geschlossen* oder *offen* genannt, je nachdem er nur aus magnetischem Material oder auch aus Schichten von Luft oder wenig magnetischem Material besteht.

In einem magnetischen Kreise findet die Verschiebung gegen Reaktionen statt, welche sich ihr entgegensetzen und sie aufheben, sobald die sie hervorbringende Ursache aufhört; um sie hervorzurufen und beizubehalten, sind also äussere Kräfte notwendig, welche derselben Natur wie die magnetischen Kräfte sind und *magnetomotorische Kräfte* genannt werden können; genau so wie zu einer elektrischen Verschiebung im Dielektrikum elektromotorische Kräfte nötig sind.

82. Induktionslinien und Kraftlinien. — Wir haben gesehen, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ durch die Oberfläche der Magnete diskontinuierlich variiert, während die Induktion $\mathfrak{B}$ stetige und solenoidische Verteilung im ganzen Felde besitzt.

Ein Beispiel soll diese Thatsache erläutern.

Wir betrachten (Fig. 81) einen gleichförmig in der Richtung J magnetisierten Zylinder $ABCD$. Man weiss, dass die Massen von freiem Magnetismus sich auf zwei gleichförmige Verteilungen mit der Dichte $\sigma = J$, eine nordmagnetische auf der Seite CD und eine südmagnetische auf der Seite AB, reduzieren.

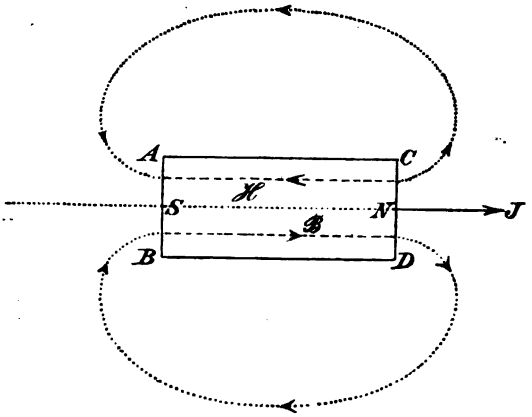

Fig. 81.

Betrachten wir die Kraftlinien. Die sehr nahe der Nordseite CD in einem beliebigen Punkte ausserhalb des Magneten gelegene, positive Einheit der magnetischen Masse wird abgestossen; wird sie dagegen sehr nahe an die Südseite AB gebracht, dann wird sie angezogen; also gehen die Kraftlinien von CD aus, biegen sich und endigen auf der Seite AB.

In Punkten ausserhalb des Magneten unendlich nahe an den Grundflächen, aber nicht an deren Begrenzung, ist die auf die Flächeneinheit kommende Anzahl der Kraftlinien, d. h. der Wert der Kraft: $2\pi J$. Um die sich im Innern des Magneten befindenden Kraftlinien zu ziehen, muss man sich denken, dass die beiden Verteilungen von Magne-

tismus auch dann vorhanden seien, wenn der Raum $ABCD$ mit Luft und nicht mit magnetischem Material ausgefüllt ist. Eine zwischen AB und CD gelegene Nordmasse wird von dem Nordmagnetismus von CD abgestossen und von dem Südmagnetismus von AB angezogen; folglich verlaufen die Kraftlinien auch im Innern des Magneten von CD nach AB. Die Kraft hat im Innern des Magneten in unendlich nahe an den Grundflächen, aber nicht an deren Begrenzung gelegenen Punkten denselben Wert wie ausserhalb des Magneten in solchen Punkten, sie besitzt aber entgegengesetzte Richtung. Wenn wir die mit der Richtung der Magnetisierung gleichgerichteten Kräfte als positiv ansehen, können wir sagen, dass die Kraft beim Durchgang durch die Oberfläche des Magneten von $2\pi J$ zu $-2\pi J$, d. h. um $4\pi J$ variiert.

Die Induktionslinien sind dagegen geschlossene Linien, welche beim Durchgang durch die beiden Grundflächen keine Unstetigkeit aufweisen. Die Induktion, die aussen gleich der Kraft ist, wird, wenn wir z. B. die Seite AB betrachten, wo die auf die Flächeneinheit kommende Zahl der Kraftlinien plötzlich um $4\pi J$ vermindert wird, innen sprungweise um den Wert $4\pi J$ vergrössert, und folglich wird die Zahl der Induktionslinien gleich der Zahl der Kraftlinien, vermehrt um den Wert $4\pi J$, d. h. sie bleibt dieselbe wie ausserhalb des Magneten: die Induktion hat also innen denselben Wert und dieselbe Richtung wie aussen.

Wenn wir den gleichförmigen Magneten, anstatt isoliert, in einem von anderen Magneten oder elektrischen Strömen erzeugten Felde betrachten, so kann die Kraft innerhalb und ausserhalb des Magneten dieselbe Richtung haben, sie erleidet aber in jedem Falle durch die Flächen AB und CD eine plötzliche Änderung um den Wert $4\pi J$; die Induktion dagegen erfährt keine Änderung.

83. Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität. Diamagnetische und paramagnetische Körper. Wir haben bereits erwähnt, dass alle Körper magnetische Erscheinungen darbieten können. Jeder in einem magnetischen Felde gelegene Körper polarisiert sich also mehr oder weniger stark; in jedem seiner Punkte existieren die Vektoren $\mathfrak{H}$, J und $\mathfrak{B}$, welche wir bei unseren Betrachtungen eingeführt haben. Es ist jetzt angezeigt, zu untersuchen, ob unter diesen Vektoren derartige Beziehungen bestehen, dass man, wenn der Wert eines derselben gegeben ist, den Wert der anderen für jeden Körper ermitteln kann.

Wie wir schon gesehen haben, bestehen für die magnetischen Erscheinungen in der Luft die Beziehungen $J = 0$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$. Wir werden sehen, dass $\mathfrak{B}$ und J in den magnetischen Körpern keine einfachen Funktionen von $\mathfrak{H}$ sind; einem und demselben Wert von $\mathfrak{H}$

können unendlich viele Werte von $\mathfrak{B}$ und J entsprechen, je nach der Reihe der Werte, welche $\mathfrak{H}$ bereits angenommen hat. Mit diesen Körpern, bei welchen die Erscheinungen verwickeltere sind, werden wir uns später beschäftigen. Für die wenig magnetischen Körper kann man annehmen, dass $\mathfrak{B}$ und J proportional mit $\mathfrak{H}$ variieren. Dasselbe kann man von den magnetischen Körpern sagen, wenn man sehr kleine Variationen von $\mathfrak{H}$ betrachtet.

In solchen Fällen wird man die Beziehungen niederschreiben können:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad \mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \tag{21}$$

$$J = \varkappa \mathfrak{H}, \qquad \varkappa = \frac{J}{\mathfrak{H}}. \tag{22}$$

Lord Kelvin nannte die Grösse μ *magnetische Permeabilität*, und die Grösse $\varkappa$ *magnetische Suszeptibilität*. Für die wenig magnetischen Körper sind μ und $\varkappa$ zwei spezifische Konstante; für das Eisen und die ihm verwandten Körper dagegen kann man ebenfalls die Gleichungen (21) und (22) anwenden, wenn man kleine Variationen von $\mathfrak{H}$ ins Auge fasst und μ und $\varkappa$ als Veränderliche, als Funktionen von $\mathfrak{H}$ behandelt; wenn die Variationen von $\mathfrak{H}$ aber gross sind, dann drücken die betreffenden Formeln die Gesetze der Erscheinung nicht mehr aus, weil μ und $\varkappa$ in diesem Falle nicht mehr als Funktionen von $\mathfrak{H}$ angesehen werden dürfen.

Betrachten wir den Fall, auf welchen die Formeln (21) und (22) anwendbar sind, und setzen wir voraus, dass der Körper nur durch Wirkung der Kraft $\mathfrak{H}$ magnetisiert sei, d. h. dass in das Feld ein isotroper, homogener, nicht vorher magnetisierter Körper eingeführt werde. Es besteht dann eine bemerkenswerte Beziehung zwischen μ und $\varkappa$; alle drei Vektoren $\mathfrak{B}$, J und $\mathfrak{H}$ haben die gleiche Richtung; folglich ergiebt sich

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi J, \tag{23}$$

woraus wiederum folgt:

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{24}$$

In diesem Falle sind μ und $\varkappa$ von einander nicht unabhängig; um die magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Körper ermitteln zu können, wird es genügen, eine von den beiden Grössen zu kennen: je nach den verschiedenen Fällen wird es bequem sein, die eine oder die andere zu betrachten.

Die magnetische Permeabilität μ hat einen positiven Wert für alle Körper; einen sehr grossen für die magnetischen Materialien, einen von der Einheit wenig verschiedenen Wert für die wenig magnetischen Körper,

und zwar ist dieser Wert etwas grösser als die Einheit für einige, etwas kleiner für einige andere Körper.

Bei den Körpern, für welche $\mu > 1$ ist, ist $\varkappa > 0$ und J hat die gleiche Richtung wie $\mathfrak{H}$. Bei den Körpern dagegen, für welche $\mu < 1$ ist, ist $\varkappa < 0$ und J besitzt eine der Richtung von $\mathfrak{H}$ entgegengesetzte Richtung. Die ersten Körper heissen *magnetisch* oder *paramagnetisch;* die anderen heissen *diamagnetisch.*

Werden paramagnetische und diamagnetische Körper der Wirkung magnetischer Kräfte unterworfen, so verhalten sie sich in verschiedener Weise.

Ein magnetischer Körper AB (Fig. 82) nimmt, wenn er in schiefer Lage in ein Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ gebracht wird, eine Magnetisierung J in der Richtung von $\mathfrak{H}$ an; er weist nämlich einen Südpol in B, einen Nordpol in A auf und unterliegt deswegen, sofern er nicht schon in

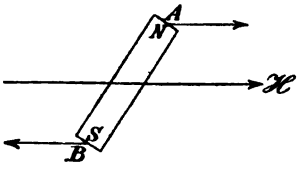

Fig. 82.

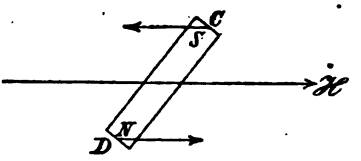

Fig. 83.

dieser Richtung selbst liegt, einem Drehmoment, das ihn mit der Achse SN in die Richtung von $\mathfrak{H}$ zu bringen sucht. Wenn man dagegen in das Feld (Fig. 83) einen diamagnetischen Körper bringt, so bildet sich, weil J und $\mathfrak{H}$ entgegengesetzt gerichtet sind, ein Nordpol in D, ein Südpol in C und folglich ein Kräftepaar, welches den Körper mit der Achse CD in die zu $\mathfrak{H}$ normale Richtung zu lagern sucht; ein diamagnetischer Körper ist in der Lage stabilen Gleichgewichtes, wenn er normal zum Felde liegt. Der Körper, der die stärksten diamagnetischen Eigenschaften besitzt, ist das Wismut.

Die Eigenschaften der diamagnetischen und paramagnetischen Körper können erklärt werden, wenn man auch die Polarisation des Mediums, in welchem sie sich befinden, betrachtet. In dem Medium hat man $\mu = 1$, folglich $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$; in dem Körper dagegen hat man für einen und denselben Wert der Induktion und folglich der Verschiebung verschiedene Werte für $\mathfrak{H}$, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu < 1$. Im ersten Falle ist die Kraft $\mathfrak{H}$ grösser in dem Medium, als in dem Körper; das Gegenteil gilt für den zweiten Fall. Was wir experimentell wahrnehmen, ist die Differenz zwischen der Kraft im Körper und der im Medium, welche in beiden Fällen entgegengesetztes Vorzeichen hat und folglich entgegengesetzte magnetische Massen und Stärken der Magnetisierung her-

vorbringt; ebenso, wie im Felde der Schwere ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper einen Antrieb nach unten oder nach oben erfahren kann, je nachdem er dichter oder weniger dicht als die Flüssigkeit ist.

Die magnetische Permeabilität kann auch anders definiert werden. Es sei SS (Fig. 84) die Trennungsfläche zwischen der Luft und einem Körper mit der Permeabilität μ; P und P' seien zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte, der eine in der Luft, der andere in dem Körper.

Zwischen den Normalkomponenten $\mathfrak{H}_n'$, $\mathfrak{H}_n$ der magnetischen Kraft in P' und P und der Normalkomponenten J_n der Magnetisierung besteht die Beziehung (17')

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi J_n$$

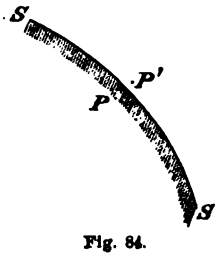

Fig. 84.

oder

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n(1 + 4\pi\varkappa) = \mu\mathfrak{H}_n,$$

woraus sich ergiebt:

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}_n'}{\mathfrak{H}_n}.$$

Man kann also die magnetische Permeabilität eines Körpers als das Verhältnis zwischen den Werten der magnetischen Kraft in zwei Punkten definieren, von welchen sich einer ausserhalb, der andere innerhalb des Körpers sehr nahe der Oberfläche befindet. Wenn $\mu > 1$ ist, hat die Kraft einen kleineren Wert im Innern des Körpers als ausserhalb derselben, und der Unterschied kann für die Körper, für welche μ gross ist, sehr bedeutend werden.

Wir haben dies erwähnt, um auf eine Verwechselung aufmerksam zu machen, die in manchen technischen Büchern bei der Definition der magnetischen Permeabilität gemacht wird. Man sagt: „Wenn in ein magnetisches Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ ein Stab von der zu untersuchenden Substanz gebracht wird, nimmt die Kraftlinienzahl, die vorher den Wert $\mathfrak{H}$ hatte, den Wert $\mathfrak{B}$ an; das Verhältnis $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ heisst dann Permeabilität.“ Nach dieser Definition scheint es, als ob für $\mu > 1$ die Kraftlinienzahl grösser innerhalb als ausserhalb des Körpers wäre, während gerade das Gegenteil der Fall ist. Man könnte diese Definition gelten lassen, wenn man die elektromagnetische Definition der Kraft ins Auge fasste, aber dann dürfte man diese Kraft im Innern der Magnete nicht als Newton'sche Kraft behandeln.

Die magnetische Permeabilität hat eine bemerkenswerte physikalische Bedeutung. Aus den Beziehungen (20) und (21) ermittelt man

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{H}}{b}, \qquad \mu = \frac{4\pi b}{\mathfrak{H}}.$$

Die Permeabilität ist der Verschiebung, die man durch eine gegebene Kraft hervorbringen kann, proportional. Wenn wir die magnetischen mit

den elektrischen Erscheinungen vergleichen, werden wir μ *Koeffizient der magnetischen Durchlässigkeit* nennen, ebenso wie wir die Dielektrizitätskonstante ε Koeffizient der elektrischen Durchlässigkeit genannt haben. Der reziproke Wert der Permeabilität dagegen, $\frac{1}{\mu}$, giebt das Mass der Kraft, die notwendig ist, um eine gewisse Verschiebung hervorzubringen; wir könnten $\frac{1}{\mu}$ *Koeffizient der magnetischen Elastizität* nennen.

Die Permeabilität μ gestattet noch eine andere physikalische Deutung, welche passender angewendet werden kann, wenn es sich um stark magnetische Körper handelt. Stellen wir uns den ganzen Raum mit einem unverdichtbaren Fluidum erfüllt vor, welches sich verschieben kann, indem es Kräfte überwindet, die umgekehrt proportional der Grösse μ sind, oder welches unter der Wirkung gegebener Kräfte der Grösse μ proportionale Verschiebungen erleidet. Wenn wir uns jeden Punkt als Angriffspunkt einer Kraft denken, welche gleich der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ ist, so erfährt das Fluidum eine Verschiebung gleich b, welche je nach der Permeabilität von Punkt zu Punkt verschieden ist. Wir sehen so ein, dass μ uns den Koeffizienten der magnetischen Durchlässigkeit des Mediums für das Fluidum darstellt; es ist eben dieser Vergleich, der Lord Kelvin veranlasste, für μ den Namen Permeabilität zu wählen.

Der Begriff Verschiebung ist nichts anderes als eine Fiktion, eine Vorstellung unseres Geistes, ein Mittel, die Thatsachen zu versinnbildlichen, ebenso gerechtfertigt, als der der Wirkung in die Ferne; aber, da er auf einer mathematischen Definition beruht, sind alle Ableitungen, die wir unter Benutzung dieses Begriffs machen, streng richtig, mindestens so lange wir uns von den Aufgaben in bezug auf die Verteilung der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ nicht entfernen.

Indem wir den Begriff der Verschiebung und die physikalische Deutung der magnetischen Permeabilität benützen, können wir den Verlauf der Induktionslinien für gegebene Verteilungen der Kraft und der Permeabilität voraussehen.

Betrachten wir einige Beispiele.

Es sei in der Luft oder in einem anderen nicht magnetischen Medium ein gleichförmiges magnetisches Feld vorhanden; die Kraftlinien sind parallele, gleichmässig verteilte Gerade; die Niveauflächen sind parallele, gleich weit von einander entfernte und zu den Kraftlinien senkrechte Ebenen. Bringt man in dieses Feld (Fig. 85) einen Körper M von grosser Permeabilität, z. B. ein Eisenstück, so wird dadurch die Verteilung der Kraftlinien und Induktionslinien verändert.

Und zwar hat man, während vorher die Permeabilität und folglich die Verschiebung in jedem Punkte die gleiche war, nunmehr innerhalb des Volumens M die Permeabilität vergrössert, folglich müssen die Werte der Verschiebung und der Induktion wachsen. Jenseits zweier passend entfernten Niveauebenen AB und CD kann man das Feld als unverändert betrachten; aber zwischen AB und CD sind die Induktionslinien keine Geraden mehr, sondern sie konvergieren, wenn die Richtung des magnetischen Feldes als von A nach C und von B nach D gehend angenommen wird, von AB aus gegen die Oberfläche ab von M und treten aus der Fläche cd nach der Ebene CD divergierend aus. Die Feldstärke wird also in der Nähe der Seite ab und cd viel grösser, dagegen viel kleiner in den Regionen P und Q sein.

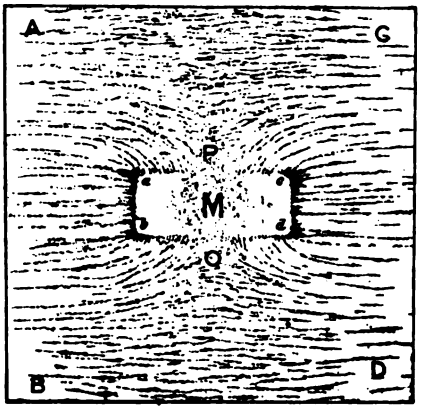

Fig. 85.

Es ist so, als ob wir einen Wasserstrom in einem gleichmässig durchlässigen Medium hätten und einen Teil M des letzteren durch einen durchlässigeren Körper ersetzten; das Wasser, das vorher den ganzen Raum gleichmässig durchsetzte, geht jetzt durch M in grösserer Menge hindurch.

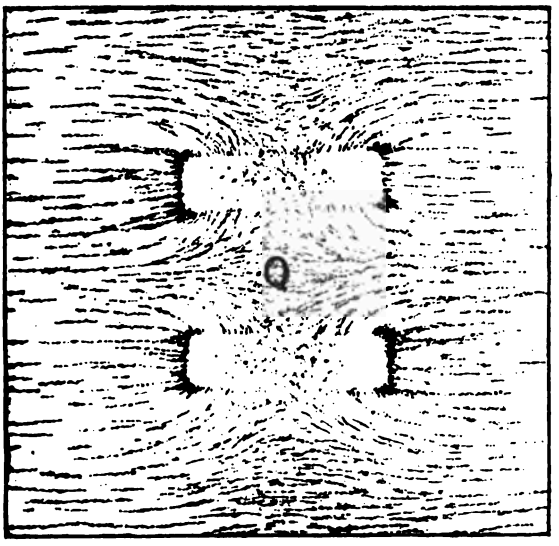

Fig. 86.

Wenn man in dem homogenen Felde, anstatt eines einzigen Eisenstabes, zwei einander und zu der Richtung des Feldes parallele Stäbe anordnet, so findet man durch analoge Betrachtungen, dass die Induktionslinien den in Fig. 86 angedeuteten Verlauf nehmen. Es ergiebt sich, dass im Raume Q zwischen beiden Stäben die Feldstärke am kleinsten ist.

Wenn unser Zweck der ist, im Raume Q die Feldstärke so klein wie möglich zu machen, werden wir ihn besser dadurch erreichen, dass wir an Stelle der beiden geraden Stäbe nach innen gebogene Stäbe verwenden; und zwar ist die Wirkung um so grösser, je näher die Stäbe einander sind, sie wird ein Maximum, wenn die Stäbe einen geschlossenen Ring bilden (Fig. 87).

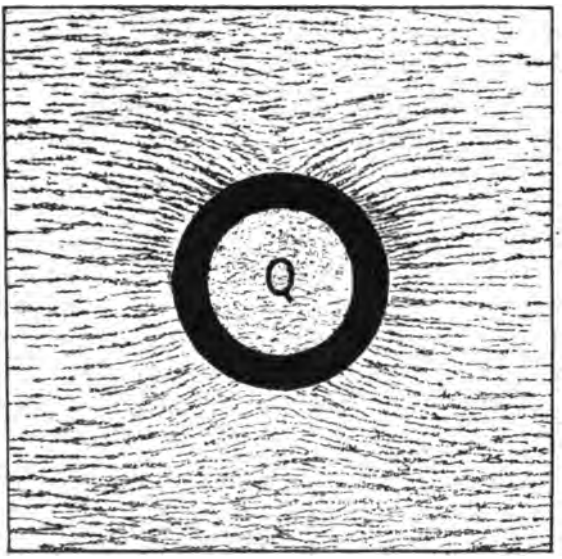

Fig. 87.

Die Induktionslinien verlaufen in den beiden Hälften des Ringes, indem sie den inneren Raum Q vermeiden. Ein Eisenring bildet somit einen *magnetischen Schirm* für seinen Innenraum. Die Erfahrung lehrt die Richtigkeit dieser unseren Voraussetzungen, wie es sich aus der Prüfung der Figuren 85, 86, 87 ergiebt, welche die den betrachteten Fällen entsprechenden magnetischen Spektra wiedergeben.

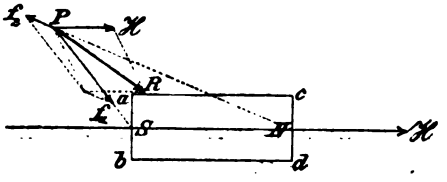

Fig. 88.

Zu denselben Schlüssen kann man gelangen, wenn man die magnetischen Massen betrachtet, welche auf dem Eisenstücke nur deswegen zu Tage treten, weil man es in ein magnetisches Feld gebracht hat. So hat man in dem vorher betrachteten Falle (Fig. 88) eine Verteilung von Südmagnetismus in ab, von Nordmagnetismus in cd. Die Kraft ist in jedem Punkte die Resultierende aus der Kraft $\mathfrak{H}$ und der von den frei

gewordenen magnetischen Massen herrührenden Kraft. Auf die in einem Punkte P gelegene Einheit der magnetischen Masse wirken die Kräfte $\mathfrak{H}$, f_1, f_2, welche bezw. vom Felde, von der Südverteilung auf ab und von der Nordverteilung auf cd herrühren und eine nach ab hin gerichtete Resultierende R ergeben.

Wenn wir in analoger Weise den in einem homogenen Felde gelegenen Ring betrachten, so bilden sich (Fig. 89) zwei Verteilungen, die eine negative in SS, die andere positive in NN. Diese beiden Verteilungen bringen in einem Punkte O in dem Raume innerhalb des Ringes Kräfte hervor, die zu der Kraft $\mathfrak{H}$ entgegengesetzt gerichtet sind. Die Resultierende R dieser drei Kräfte ist sehr klein oder verschwindet gänzlich.

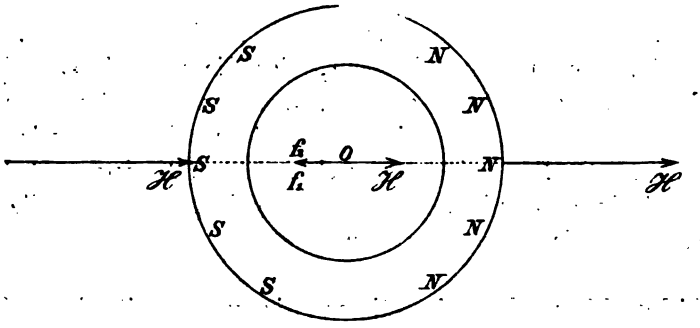

Fig. 89.

Diese Eigenschaft der Ringe aus magnetischem Materiale wird bei vielen Messapparaten verwendet.

Wir haben uns auf einfache qualitative Betrachtungen beschränkt, aber wir könnten auch, indem wir von dem Begriff der Permeabilität oder von dem der induzierten magnetischen Massen ausgehen, für die verschiedenen Fälle genauere quantitative Berechnungen anstellen.

84. Magnetische Eigenschaften der magnetischen Materialien. — Die vorher ermittelten Beziehungen gelten nur, wenn man Körper betrachtet, in welchen die magnetische Permeabilität sehr nahe dem Werte *Eins* ist; sie gelten nicht mehr, ausser für sehr kleine Änderungen, bei stark magnetischen Körpern. Für diese sind die Induktion und die Magnetisierung nicht mehr der magnetischen Kraft proportional; sie sind sogar nicht einmal bestimmte Funktionen von $\mathfrak{H}$, weil einem und demselben Wert von $\mathfrak{H}$ unendlich viele Werte für $\mathfrak{B}$ oder J entsprecken können, je nach den Werten, welche die magnetische Kraft vorher angenommen hat.

Wir beabsichtigen nun im Folgenden, die magnetischen Eigenschaften des Eisens und der ihm verwandten Körper zu studieren, d. h. das Gesetz,

nach welchem in diesen Körpern die Grösse $\mathfrak{B}$ und folglich auch J mit dem Variieren von $\mathfrak{H}$ sich ändert, zu erforschen.

Wir werden sehen, wie man durch einen elektrischen Strom in einem gegebenen Raume eine magnetische Kraft erzeugen kann, welche sich leicht berechnen lässt, wenn die Stärke des elektrischen Stromes bekannt ist; wir werden ferner sehen, wie man durch die elektrischen Wirkungen, welche von den Änderungen des Induktionsflusses in einem gegebenen magnetischen Kreise erzeugt werden, den Mittelwert der magnetischen Induktion in einem gegebenen Schnitte des magnetischen Kreises berechnen kann; wir werden also die nötigen Unterlagen haben, um die magnetischen Eigenschaften eines beliebigen Körpers zu studieren, da wir in ihm bestimmte magnetische Kräfte $\mathfrak{H}$ erzeugen und für jeden Wert von $\mathfrak{H}$ den entsprechenden Wert der Induktion $\mathfrak{B}$ bestimmen können.

Es interessiert uns jedoch nicht, hier die verschiedenen Methoden zu beschreiben, nach welchen solche Versuche angestellt werden können; es genügt uns, deren Möglichkeit angedeutet zu haben, und wir erwähnen ohne weiteres die Ergebnisse, zu welchen Prof. Ewing und Dr. Hopkinson bei ihren klassischen Versuchen gelangten, sowie die Schlussfolgerungen, die sie daraus ableiteten.

Weiches Eisen. Experimentieren wir zuerst mit einem Stab von weichem, möglichst reinem Schmiedeeisen. Die Beziehung, welche zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ besteht, kann in diesem Falle, wie schon erwähnt, nicht durch eine algebraische Funktion ausgedrückt werden; es wird sich empfehlen, dieselbe geometrisch durch eine auf zwei orthogonale Achsen bezogene Kurve darzustellen, indem wir auf der Abscissenachse die Werte von $\mathfrak{H}$ und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Werte von $\mathfrak{B}$ auftragen. Für die graphische Darstellung pflegt man, um derselben grössere Deutlichkeit zu verleihen, die Werte von $\mathfrak{H}$ auf eine tausendmal grössere Einheit als die Werte von $\mathfrak{B}$ zu beziehen. Setzen wir voraus, dass der Stab vor dem Beginn des Versuches von jeder Spur vorherbestehender magnetischer Polarisation befreit worden sei, d. h. dass man den Körper auf den natürlichen Zustand gebracht habe, wo also $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ beide gleich Null sind. In unserer graphischen Darstellung ist somit (Fig. 90) der Ursprung O der Koordinatenachsen ein Punkt der Kurve.

Wenn wir der Grösse $\mathfrak{H}$ von Null aus langsam wachsende Werte beilegen, so steigt die Induktion $\mathfrak{B}$ zuerst auch langsam, dann schneller, während sie sich für eine gewisse Strecke der Kraft $\mathfrak{H}$ fast proportional hält; später wächst sie viel weniger rasch und ist endlich wiederum bestrebt, sich proportional mit $\mathfrak{H}$ zu ändern. Die uns diese Variationen dar-

stellende Kurve geht also von O die Abscissenachse $\mathscr{H}$ tangierend aus, dann biegt sie sich und wendet ihre konvexe Seite gegen die Abscissenachse. Über den Punkt N von grösster Krümmung hinaus nähert sich die Kurve merklich einer Geraden, dann biegt sie sich wieder, indem sie die konkave Seite gegen die Abscissenachse wendet. Der Punkt M ist

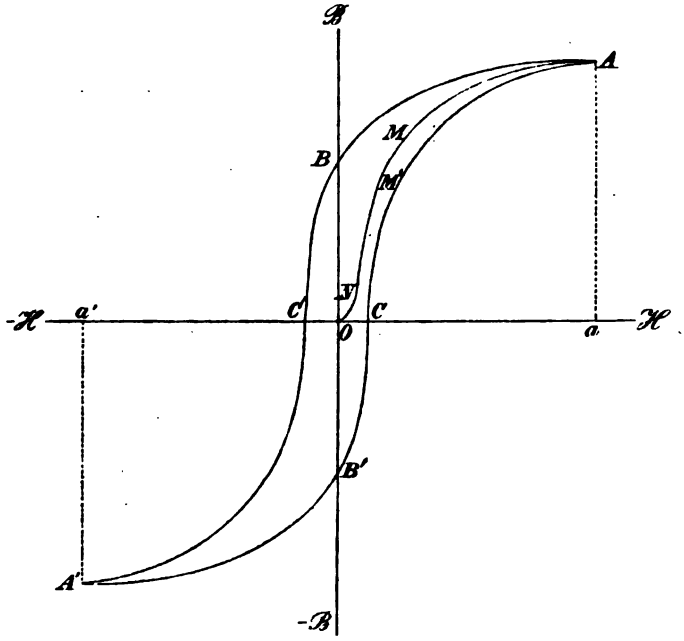

Fig. 90.

wiederum ein Punkt grösster Krümmung, welcher „*das Knie*" genannt wird; jenseits desselben wird die Krümmung schwächer, und die Linie zeigt wieder einen merklich geradlinigen Verlauf, indem sie nach einer Asymptote strebt, welche unter einem Winkel von 45° ansteigen würde, wenn man für $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ gleichen Massstab wählte, da $\mathscr{H}$ und $\mathscr{B}$ für sehr grosse Werte einander gleich sind.

Wenn wir die magnetische Permeabilität berechnen, welche hier keine Konstante mehr, sondern ein veränderliches Verhältnis zwischen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ ist, finden wir, dass die Permeabilität mit dem Werte $\mu = 1$ im Ursprung beginnt, mehr oder weniger langsam bis zu einem dem Knie nahen Punkte M' steigt, in welchem die Kurve von der durch den Koordinaten-Mittelpunkt gezogenen Tangente berührt wird, dann, die Tangente nicht durchsetzend, langsamer ansteigt und für sehr grosse Werte von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ wieder dem Werte $\mu = 1$ zustrebt. Dementsprechend geht die magnetische Suszeptibilität vom Werte Null im

Ursprung aus, wächst bis zum Punkte M', um wieder zu sinken und nach Null zu konvergieren.

Dieses ist der Verlauf des Vorgangs, welcher im wesentlichen für alle Sorten von weichem Eisen gleich ist. Wenn man jedoch die numerischen Werte betrachtet, so findet man dieselben sehr verschieden je nach der Qualität und Reinheit des Eisens. Für sehr weiches, ausgeglühtes, reines Eisen kann man folgende Zahlen als Mittelwerte annehmen:

Der erste Punkt N maximaler Krümmung entspricht einem Abscissenwerte von $\mathfrak{H} = 1$; das Knie M einem Werte $\mathfrak{H} = 5$, welchem ein Ordinatenwert $\mathfrak{B} = 10\,000$ entspricht; für $\mathfrak{H} = 11$ hat man $\mathfrak{B} = 12\,500$, für $\mathfrak{H} = 17$ ist $\mathfrak{B} = 13\,500$; der grösste Wert von μ kann zwischen 2000 und 3000 variieren, und diesem entspricht für $\varkappa$ ein Wert zwischen 150 und 250.

Bis jetzt haben wir die Kraft $\mathfrak{H}$ nur, während sie allmählich anwuchs, betrachtet. Wenn ein Wert Oa von $\mathfrak{H}$, welchem ein Wert aA von $\mathfrak{B}$ zukommt, erreicht ist, lassen wir $\mathfrak{H}$ nach und nach wieder abnehmen; $\mathfrak{B}$ sinkt dann auch, aber wir bemerken sogleich eine wichtige Thatsache: es nimmt nämlich die Grösse $\mathfrak{B}$ nunmehr andere Werte an, als sie beim Anwachsen der Grösse $\mathfrak{H}$ besass, und zwar behält sie an allen Stellen grössere Werte, als sie vorher beim Anwachsen von $\mathfrak{H}$ an diesen Stellen hatte. Daher fällt der neue Ast der Kurve mit dem ersten Ast OMA nicht zusammen, sondern verläuft oberhalb desselben, geht von A mit einer zur Abscissenachse merklich parallelen Tangente aus und fällt langsam ab derart, dass $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{H}$ wieder zu Null geworden ist, noch einen sehr grossen Wert OB behält, welcher gewöhnlich für weiches Eisen ungefähr $^2/_3$ des maximalen Wertes aA beträgt.

Wenn man nun der Grösse $\mathfrak{H}$ wachsende negative Werte zuschreibt, sinken die Werte von $\mathfrak{B}$ erst sehr schnell, bis $\mathfrak{B}$ für einen Wert OC' von $\mathfrak{H}$ gleich Null wird; man hat folglich eine rasch fallende Kurve, die im letzten Stücke fast geradlinig verläuft und die negative Seite der Abscissenachse in einem Punkte C' schneidet. Für das weiche Eisen ist der Wert von OB, wenn der maximale Wert aA von $\mathfrak{B}$ 12 000 bis 15 000 war, 8000 bis 9000, und der Wert von OC' ungefähr 2.

Wenn man fortfährt, $\mathfrak{H}$ negativ anwachsen zu lassen, wird $\mathfrak{B}$ auch negativ und steigt zuerst schnell, dann nach und nach langsamer; die Kurve verläuft bei C' eine gewisse Strecke merklich geradlinig, dann biegt sie sich, indem sie die konkave Seite der negativen Abscissenachse zuwendet, und strebt asymptotisch nach einer Geraden, welche unter 45^0 gegen die Achsen geneigt wäre, wenn die Massstäbe für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ in

der Zeichnung gleich gewählt worden wären. Wenn die Grösse $\mathfrak{H}$ einen Wert $Oa' = -Oa$ erreicht hat, nimmt $\mathfrak{B}$ den Wert $a'A' = -aA$ an, d. h. der zu A in bezug auf den Koordinaten-Mittelpunkt symmetrisch gelegene Punkt A' gehört der Kurve an. Wenn wir, nach A' gelangt, $\mathfrak{H}$ die gleichen, aber entgegengesetzten Änderungen erfahren lassen, indem wir nämlich $\mathfrak{H}$ allmählich vom Werte Oa' zu Null und dann zum Werte Oa variieren lassen, erhalten wir einen zweiten Ast der Kurve, welcher sehr angenähert dem schon gezogenen Aste in bezug auf den Koordinaten-Mittelpunkt symmetrisch ist, d. h. wir erhalten eine Kurve, die von A' mit einer zur Abscissenachse nahezu parallelen Tangente ausgeht, eine lange Strecke langsam steigt, bis sie die Ordinatenachse in einem Punkte B' schneidet, für welchen die Beziehung $OB' = -OB$

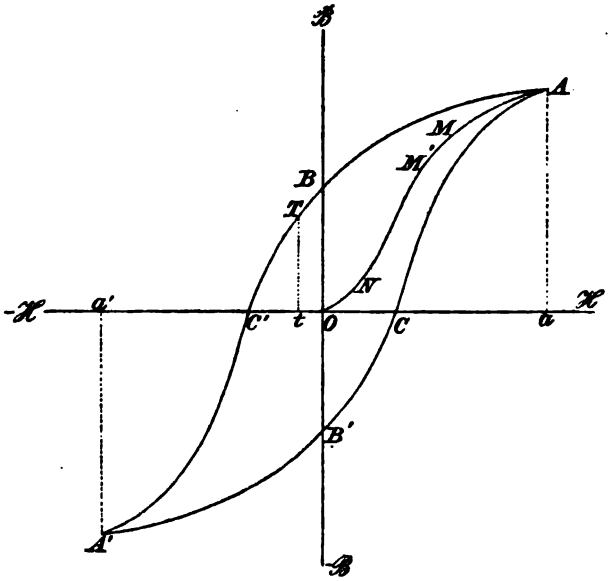

Fig. 91.

gilt, dann schnell ansteigt, für $\mathfrak{H} = OC = -OC'$ die Abscissenachse schneidet, und schliesslich, ähnlich wie die Kurve $C'A'$ verlaufend, mit grosser Annäherung im Punkte A endigt.

Stahl. Wenn man dieselben Untersuchungen für den Stahl anstellt, erhält man eine Kurve, die im ganzen denselben Verlauf hat, aber in der Richtung der Abscissenachse gestreckter erscheint, weil die Ordinatenwerte $\mathfrak{B}$ mit dem Wachsen von $\mathfrak{H}$ viel weniger rasch anwachsen.

So hat für gehärteten Stahl, wie er für Klaviersaiten verwendet wird, der erste Ast OMA der Kurve (Fig. 91) das Knie M bei einem Wert von $\mathfrak{B}$ gleich 7000 bis 8000, welcher einem Werte $\mathfrak{H}$, von un-

gefähr 50 entspricht; und damit $\mathfrak{B}$ den Wert 10 000 erreiche, ist es nötig, $\mathfrak{H}$ bis zum Werte 100 zu steigern. Der fallende Ast der Kurve $ABC'A'$ liegt wiederum ganz oberhalb des steigenden Astes $A'B'CA$; die beiden Äste können zwar auch als symmetrisch in bezug auf den Koordinaten-Mittelpunkt angesehen werden, gewöhnlich endigt jedoch der zweite Ast nicht genau in A; die Tangenten in A zum ersten, in A' zum zweiten Ast können mit hinreichender Annäherung als parallel der Abscissenachse betrachtet werden. Als mittlere Werte für glasharten Stahl kann man annehmen, dass

$$OB = -OB' = 6000 \text{ bis } 7000,$$
$$OC = -OC' = 40.$$

Der höchste Wert der Permeabilität in der Nähe des Knies ist etwa 150, der entsprechende höchste Wert der Suszeptibilität ist etwa 12.

Je nach der Zusammensetzung und dem physikalischen Zustande des Stahles ändern sich die Ordinatenwerte der Kurve.

Das Gusseisen, dessen allgemeine Eigenschaften zwischen denjenigen des Stahles und des weichen Eisens liegen, hat auch mittlere magnetische Eigenschaften.

85. Einfluss der chemischen Zusammensetzung und der physikalischen Zustände. — Die Verschiedenheiten, die wir bei dem magnetischen Verhalten des weichen Eisens, Gusseisens und Stahles bemerkt haben, beweisen uns, dass die magnetischen Eigenschaften des Eisens von der Menge und Beschaffenheit der fremden Substanzen abhängen müssen, mit welchen sie vermischt sind. Im allgemeinen lehrt die Erfahrung, dass die fremden Substanzen die magnetische Permeabilität und Suszeptibilität kleiner machen. Es giebt ferner gewisse Substanzen, welche, wenn auch nur in geringer Menge vorhanden, die magnetische Permeabilität und Suszeptibilität ausserordentlich verringern; die bekannteste von allen ist das Mangan, wovon 12% schon genügen, um die Suszeptibilität des Eisens ganz zum Verschwinden zu bringen; die manganhaltigen Eisenverbindungen verhalten sich daher fast wie unmagnetische Körper, sie besitzen nämlich eine Permeabilität μ gleich oder sehr nahe *Eins*.

Auf die magnetischen Eigenschaften hat ferner die mechanische Struktur des Eisens Einfluss. Die dauernden, durch mechanische Wirkungen erzeugten Deformationen eiserner Gegenstände verändern die Kurve der magnetischen Induktion derart, dass sie sich der Kurve des Stahles nähert. Prof. Ewing fand z. B., indem er mit einem Draht aus weichem Eisen experimentierte, welcher eine permanente Verlängerung erfahren hatte, dass nur aus diesem Grunde die Werte von $\mathfrak{B}$ für dieselben Werte von $\mathfrak{H}$

vermindert worden waren gegen die Werte, welche sie ursprünglich an den betreffenden Stellen besessen hatten.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft ist die, dass durch Vibrationen, denen eiserne Gegenstände ausgesetzt werden, eine Annäherung der beiden Äste der Kurve $AC'A'$ und $A'CA$ herbeigeführt wird. Diese Thatsache ist sehr wichtig, weil fast alle Maschinen und technischen Apparate, da sie bewegliche Teile besitzen, notwendigerweise Erschütterungen und Schwingungen unterworfen sind.

Die Temperatur hat bis zu ziemlich hohen Grenzen keinen merklichen Einfluss auf die magnetischen Eigenschaften des Eisens, aber über gewisse Grenzen hinaus wird der Einfluss der Temperatur sehr gross. Bringt man einen Stab aus weichem Eisen in ein magnetisches Feld mit der Stärke $\mathfrak{H}$, und lässt man die Temperatur des Stabes variieren, während man für jeden Wert der Temperatur den entsprechenden Wert der Magnetisierung im Eisen bestimmt, so findet man, dass dieser Wert bis zu einer Temperatur von etwa 680° konstant bleibt, dann rasch sinkt und für eine Temperatur von ungefähr 750° zu Null wird.

86. Magnetischer Kreisprozess. Hysteresis. — Die schematischen, oben beschriebenen Kurven veranschaulichen das magnetische Verhalten der verschiedenen Materialien; es wird gut sein, über dieselben noch einige Betrachtungen anzustellen, aus denen wichtige Schlüsse gezogen werden können.

Es ergiebt sich vor allem, dass die magnetische Permeabilität für das Eisen und die ihm verwandten Körper, wie wir mehrmals erwähnt haben, nicht nur keine Konstante, sondern auch nicht einmal eine bestimmte Funktion der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ ist.

In der That entsprechen in der beschriebenen Kurve (Fig. 92) einem und demselben Wert Op von $\mathfrak{H}$ drei Werte für $\mathfrak{B}$, d. h. pP, pP', pP''. Wenn wir nun in unserem Versuche, $\mathfrak{H}$ zwischen entgegengesetzt gleichen, von den vorher betrachteten verschiedenen Werten Oa_1, Oa_1' variieren lassen, erhalten wir die Kurve $A_1C_1'A_1'C_1A_1$, deren Verlauf ganz analog dem der vorigen Kurve ist, und welche für einen und denselben Wert Op von $\mathfrak{H}$ zwei verschiedene Werte pP_1' und pP_1'' für $\mathfrak{B}$ ergiebt.

Man kann nun für jeden Punkt der Kurve OA und deren Verlängerung dieselbe Konstruktion wiederholen.

Diese Erwägungen berechtigen uns zu dem Schlusse, dass jedem Werte von $\mathfrak{H}$ unendlich viele, innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossene Werte für $\mathfrak{B}$ entsprechen können. Folglich genügt es, um den Wert von $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, nicht, den Wert von $\mathfrak{H}$ anzugeben, sondern es ist ausserdem nötig, die ganze Reihe der Werte, die $\mathfrak{H}$ schon vorher ange-

nommen hat, anzugeben. Man betrachte jetzt den Punkt P, in welchem man $\mathfrak{H} = Op$ und $\mathfrak{B} = pP$ hat, und lasse $\mathfrak{H}$ bis zu Null abnehmen, und dann wieder bis zum Werte Op anwachsen. Der Endpunkt der Ordinate, die den Wert von $\mathfrak{B}$ darstellt, beschreibt hierbei, indem, wenigstens mit hinreichender Annäherung, der Punkt P wieder erreicht wird, eine geschlossene Linie, welche von einem fallenden und einem ganz unterhalb des ersten verlaufenden, steigenden Stücke gebildet ist; die Tangenten in den Anfangspunkten beider Äste sind nahezu parallel zu der Abscissenachse.

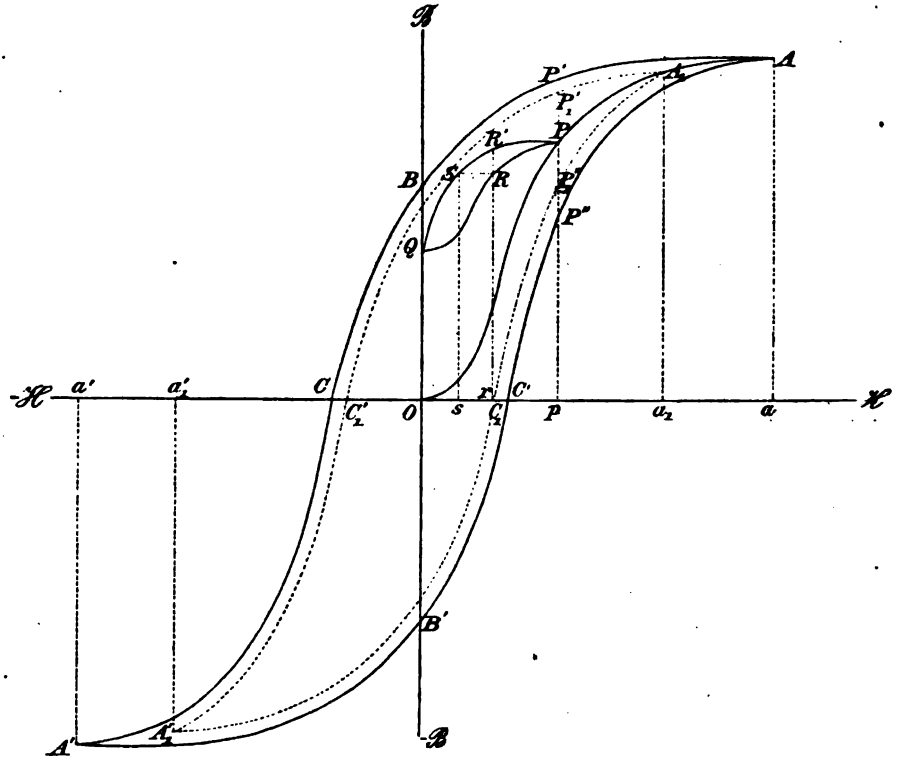

Fig. 92.

Im allgemeinen können wir sagen: wenn man $\mathfrak{H}$ in einer beliebigen Weise variieren und auf den ursprünglichen Wert zurückkehren lässt, wird auch $\mathfrak{B}$ mit hinreichender Annäherung den anfänglichen Wert wieder annehmen. Der Endpunkt der Ordinate, welche den Wert von $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ angiebt, durchläuft eine geschlossene Linie, die man *magnetischen Zyklus* nennt. Man sagt, dass man das Material einen magnetischen Zyklus durchlaufen lässt, wenn man in demselben diese Änderungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hervorbringt.

In einem zyklischen Magnetisierungsprozesse hat man immer zwei Äste zu betrachten, den steigenden für zunehmende, und den fallenden für abnehmende Werte von $\mathfrak{H}$; in ihren Anfangspunkten sind ihre Tangenten als nahezu parallel zur Abscissenachse anzusehen; ferner liegt der fallende Ast immer oberhalb des steigenden. Wir können dies anders ausdrücken, indem wir sagen, dass der Zyklus immer dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt durchlaufen werden muss, wenn man, wie üblich, als positive Richtung für $\mathfrak{H}$ die Richtung von links nach rechts, für $\mathfrak{B}$ die von unten nach oben annimmt.

In dem Zyklus PQ, den wir betrachtet haben, entsprechen einem und demselben Wert Or von $\mathfrak{H}$ zwei Werte für $\mathfrak{B}$; der dem fallenden Ast entsprechende Wert rR' ist immer grösser als der Wert rR, der dem steigenden Ast angehört. Auf den Wert, welchen $\mathfrak{B}$ für einen gegebenen Wert von $\mathfrak{H}$ annimmt, ist es von erheblichem Einfluss, welchen Wert $\mathfrak{B}$ vorher für nahe gelegene Werte von $\mathfrak{H}$ inne hatte; man kann sagen, dass $\mathfrak{B}$ das Bestreben hat, den Wert, den es bei einem bestimmten Werte von $\mathfrak{H}$ inne hatte, auch bei einer Veränderung von $\mathfrak{H}$ beizubehalten, oder, in anderen Worten, die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ zögert den Veränderungen nachzukommen, welchen wir sie durch die Veränderungen der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ unterziehen wollen.

Die Erscheinung kann auch auf folgende Weise aufgefasst werden. Von der Stelle R ausgehend, für welche $\mathfrak{H} = Or$ und $\mathfrak{B} = rR$ ist, lasse man $\mathfrak{B}$ den steigenden Ast RP durchlaufen und verfolge man dann den fallenden Ast; wenn $\mathfrak{H}$ den Wert Or wieder angenommen hat, besitzt $\mathfrak{B}$ einen Wert $rR' > rR$; damit $\mathfrak{B}$ den ursprünglichen Wert erhält, ist es nötig, dass $\mathfrak{H}$ einen Wert $Os < Or$ annehme. Wenn wir die Bewegung der Projektionen des beweglichen Punktes auf die Koordinatenachsen ins Auge fassen, sehen wir, wie die Bewegung der Projektion auf der Ordinatenachse eine Verzögerung in bezug auf die Bewegung der Projektion auf der Abscissenachse erfährt, d. h. die Änderungen von $\mathfrak{B}$ erfolgen gewissermassen mit einer Verspätung gegenüber den Änderungen von $\mathfrak{H}$.

Prof. Ewing erteilte dieser Eigenschaft der magnetischen Materialien den Namen *Hysteresis*, welchen er aus dem griechischen Wort ὑστερεῖν, zurückbleiben, ableitete.

Die Existenz der magnetischen Zyklen ist eine Folge des Vorhandenseins der Hysteresis als einer charakteristischen Eigenschaft magnetischer Materialien. Wir können die Erscheinung der Hysteresis mit bekannten mechanischen Erscheinungen vergleichen.

Wenn eine vom Werte Null aus anwachsende Kraft einen Körper angreift, auf welchen andere Körper Reibung ausüben, so setzt er sich

nicht sofort in Bewegung, sondern erst dann, wenn die Kraft einen gewissen Wert erreicht hat; die Reihe der Werte der Verschiebungen folgt den Kraftänderungen mit einer gewissen Verspätung. Dies genügt, uns zu veranschaulichen, dass die Hysteresis als von einer inneren Reibung hervorgebracht gedacht werden kann, welche die Orientierungsbewegung der Molekeln hemmt, wenn wir die Hypothese annehmen, dass die Magnetisierung von einer besonderen Orientierung der Molekeln innerhalb der magnetischen Materialien herrührt.

Viel vollständiger ist die Analogie zwischen den magnetischen und den elastischen Erscheinungen, wenn man die magnetische Verschiebung oder Induktion mit der elastischen Deformation und die magnetische Kraft mit der deformierenden Kraft vergleicht. Die Körper, bei welchen die magnetische Induktion eine bekannte Funktion der magnetischen Kraft ist, gleichen den vollkommen elastischen Körpern, für welche einem gegebenen Wert der deformierenden Kraft ein einziger, bestimmter Wert für die Deformation zukommt. Die magnetischen Körper dagegen, in welchen die Hysteresis existiert, verhalten sich wie unvollkommen elastische Körper, welche je nach der Stärke und Wirkungsdauer der vorher wirksam gewesenen deformierenden Kraft verschiedene Deformationen aufweisen. Wenn wir z. B. einen Stab aus einer unvollkommen elastischen Substanz der Wirkung einer von Null nach und nach ansteigenden Kraft aussetzen, welche ihn zu verlängern sucht, so beginnt der Stab sich erst zu strecken, wenn die Kraft einen gewissen Wert erreicht hat. Wenn wir, sobald eine gewisse Verlängerung erlangt ist, die Kraft allmählich verringern, so verkürzt sich der Stab erst nach einer gewissen Zeit; die Stablänge behält hierbei immer grössere Werte als diejenigen, die denselben Werten der Kraft während der Verlängerung entsprachen. Man hat also eine vollkommene Analogie zwischen den Erscheinungen der elastischen Nachwirkung und denen der magnetischen Hysteresis.

87. Retentionsvermögen. Koerzitivkraft. — Wir haben bemerkt, dass die Induktion $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{H}$ von Null bis zu einem gewissen Werte Oa gesteigert und wieder zu Null gebracht wird, nicht zu Null zurückkehrt, sondern einen gewissen Wert behält; man kann folglich von einem Rückstand oder einer *Remanenz der magnetischen Induktion* reden, welcher eine rückständige oder *remanente Magnetisierung* entspricht, deren Wert aus der Formel (23)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi J$$

leicht ermittelt werden kann, welche für $\mathfrak{H} = 0$

$$J = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}$$

ergiebt.

Um die remanente Magnetisierung verschwinden zu lassen, genügt es nicht, die magnetische Kraft zu vernichten, sondern man muss dieselbe umkehren und ihr einen gewissen Wert erteilen.

Dr. Hopkinson gab der remanenten Induktion OB den Namen *Retentionsvermögen* *), und der Kraft OC', welche notwendig ist, um die Induktion auf den Wert Null zu bringen, den Namen *Koerzitivkraft.*

Früher nannte man die bekannte Eigenschaft des Eisens und der ihm verwandten Körper, besonders des Stahles, beim Aufhören der magnetisierenden Kraft einen remanenten Magnetismus beizubehalten, „Retentionsvermögen"; man nannte ferner Koerzitivkraft die Ursache dieses rückständigen Magnetismus und nahm letzteren als Mass für die Koerzitivkraft, was selbstverständlich nicht richtig war, weil der Magnetismus keine Kraft ist.

Dr. Hopkinson gab den alten Benennungen eine bestimmte und geeignete Bedeutung; die Koerzitivkraft, wie sie von ihm definiert wird, ist eine wirkliche magnetische Kraft.

Früher sagte man, weil der Stahl nach Aufhören der die Magnetisierung hervorbringenden Ursache gewöhnlich viel stärker als das Eisen magnetisiert bleibt, dass in dem Stahl das Retentionsvermögen viel grösser sei als im Eisen.

Wenn die Thatsache an sich richtig ist, so ist doch die Erklärung, die man dafür gab, falsch. Aus den Kurven der magnetischen Induktion für das Eisen und den Stahl (Fig. 90, 91) ergiebt sich, dass im Eisen die remanente Induktion grösser, die Koerzitivkraft dagegen viel kleiner ist als im Stahl.

Versuchen wir durch diese Eigenschaft die Thatsache zu erklären, dass der Stahl nach Aufhören der magnetisierenden Ursache sich im allgemeinen stärker magnetisiert erhält als das Eisen.

Denken wir uns (Fig. 93) einen prismatischen Eisenstab in einem gleichförmigen magnetischen Felde, dessen Stärke $\mathfrak{H}'$ nach Belieben verändert werden kann. Durch die Wirkung der Kraft $\mathfrak{H}'$ hat man in dem Stabe eine gewisse Magnetisierung J hervorgerufen, und es ist eine nordmagnetische Verteilung von freiem Magnetismus auf AB und eine südmagnetische auf CD entstanden. Auf einen Punkt P innerhalb des Magneten wirken nun zwei Kräfte, die vom homogenen Felde herrührende Kraft $\mathfrak{H}'$ und die zu dieser entgegengesetzt gerichtete Kraft $\mathfrak{H}''$, die von den Massen

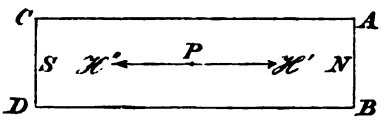

Fig. 93.

*) In der Litteratur hat sich dafür die Bezeichnung *Remanenz* eingebürgert.

von freiem Magnetismus hervorgebracht wird und entmagnetisierend wirkt. Die Kraft $\mathfrak{H}$, die in Wirklichkeit auf den Punkt P wirkt, ist die Resultierende aus den beiden Kräften $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$, und wir müssen dieselbe ins Auge fassen, um die Beziehungen der Induktion zur magnetischen Kraft zu erörtern. Früher sagte man, dass mit der Intensität $\mathfrak{H}'$ des gleichförmigen magnetischen Feldes auch die auf P wirkende magnetische Kraft zu Null werde. Dies ist aber nicht richtig; es bleibt noch eine entmagnetisierende Kraft, weil die freien, auf den gegenüberliegenden Endseiten des Stabes verteilten magnetischen Massen wegen des Retentionsvermögens nicht vollständig verschwinden. Indem man also die erste Ursache der Magnetisierung, z. B. einen ein magnetisches Feld hervorrufenden elektrischen Strom aufhebt, wird die magnetische Kraft nicht Null. Man muss vielmehr umgekehrt, um den diesem Zustande des Körpers entsprechenden Wert der Induktion und folglich der Magnetisierung zu erhalten, in unseren Kurven den Wert von $\mathfrak{B}$ suchen, der nicht dem Werte $\mathfrak{H} = 0$, sondern dem von der entmagnetisierenden Kraft gegebenen negativen Wert von $\mathfrak{H}$ zukommt.

Bei dem Eisen, in welchem die Koerzitivkraft klein ist, kann die entmagnetisierende Kraft leicht den Wert der Koerzitivkraft erreichen, und deswegen hört die Magnetisierung mit dem Aufhören ihrer Ursache nahezu vollständig auf.

Beim Stahl dagegen, in welchem die Koerzitivkraft einen grossen Wert besitzt, behält die magnetische Induktion beim Aufhören der magnetisierenden Ursachen noch einen erheblichen Wert bei, beispielsweise den Wert tT (Fig. 91) für einen negativen Wert Ot der magnetischen Kraft. Es ist bekannt, dass die permanenten Magnete, eben dieser Eigenschaft des Stahles wegen, aus diesem Materiale hergestellt werden.

Als Bestätigung des Gesagten ist noch zu bemerken, dass man im weichen Eisen grössere Werte der Induktion und der Magnetisierung beim Aufhören der magnetisierenden Ursache als im Stahl wahrnehmen kann, wenn beim ersteren eine Anordnung getroffen wird, welche gestattet, auch bei grossen Werten der Magnetisierung nur eine kleine entmagnetisierende Kraft zu erhalten; letzteres erreicht man z. B. durch Verwendung sehr langer, dünner, oder noch besser ringförmig gebogener Stäbe.

Die Hysteresis ist die Ursache, dass das Retentionsvermögen und die Koerzitivkraft bestimmte Werte besitzen; die Existenz permanenter Magnete ist also eine Folge der Hysteresis. Wenn keine Hysteresis vorhanden wäre, dann könnte man keine von statischen Bedingungen abhängigen magnetischen Felder haben. Die permanenten Magnete, deren

Betrachtung wir an den Anfang unserer Untersuchung stellten, können also nach unsern zuletzt entwickelten Anschauungen keineswegs als die einfachsten magnetischen Gebilde angesehen werden.

---

§ 4.

Magnetische Feldenergie.

88. Arbeit, die von den magnetischen Kräften zur Veränderung der Verschiebung geleistet wird. Bei unserem Studium haben wir nach und nach die Newton'sche Auffassung von fernwirkenden Massen von Agens durch den Maxwell'schen Begriff der Verschiebung ersetzt, welcher besser der Thatsache entspricht, dass die magnetischen Erscheinungen sich im ganzen Raume, also sowohl innerhalb magnetischer Körper als auch in dem zwischen diesen befindlichen Medium, abspielen. Mathematisch ist die Verschiebung vollständig bestimmt, weil wir dieselbe durch die Beziehung definiert haben, welche sie mit der magnetischen Induktion verbindet; aber vom physikalischen Gesichtspunkte aus können wir keine bestimmte Deutung für dieselbe geben; man hat sie mit der Verschiebung eines den ganzen Raum ausfüllenden unverdichtbaren Fluidums verglichen, aber nichts berechtigt uns zu behaupten, dass diese Verschiebung in einem magnetischen Felde thatsächlich stattfinde. Daher kann man die Folgerungen, die aus dieser Theorie abgeleitet und berechtigt sind, solange wir innerhalb der Grenzen bleiben, innerhalb welcher wir die Verschiebung selbst definiert haben, nicht mehr ohne Kontrole durch das Experiment als mit den Thatsachen der Erfahrung übereinstimmend ansehen, wenn man aus diesen Grenzen heraustritt und andere willkürliche Hypothesen einführen muss.

So dürfen wir z. B., da wir bei der Definition der Verschiebung nichts über Arbeit ausgesagt haben, nun auch ohne weiteres nichts darüber behaupten. Wenn wir aber die von den magnetischen Kräften für eine Änderung der Verschiebung geleistete Arbeit berechnen, indem wir die Hypothese aufstellen, dass jene Arbeit der von den bezüglichen auf ein unverdichtbares Fluidum wirkenden Kräften geleisteten Arbeit entspreche, wenn jedes Teilchen des Fluidums eine Verschiebung gleich der Änderung der magnetischen Verschiebung in dem Punkte erfährt, und wenn wir dann zu Ergebnissen kommen, welche durch die Erfahrung bestätigt werden, so können wir daraus schliessen, dass der Begriff „Verschiebung" auch auf die Betrachtung der Arbeit ausgedehnt werden darf.

Berechnen wir nach dieser Hypothese die Arbeit eines magnetischen Feldes für eine gegebene Änderung der Verschiebung.

Es sei (Fig. 94) eine unendlich dünne Induktions- oder Verschiebungsröhre gegeben, von welcher wir einen zwischen zwei senkrechten Schnitten AA und BB begrenzten Teil betrachten, mit der im Vergleich zu den Dimensionen der Schnitte sehr grossen Länge l, die aber klein genug ist, damit der betrachtete Röhrenteil als zylindrisch angesehen werden kann. Wenn die Verschiebung in einem beliebigen Schnitte MM vom Flächeninhalte a eine verschwindend kleine Veränderung db erfährt, so geht durch diesen Schnitt in der Richtung b, nach welcher die Verschiebung variiert, eine Menge des Fluidums adb. Weil das Fluidum unverdichtbar ist, so geht durch jeden Schnitt der Röhre dieselbe Menge adb des Fluidums hindurch; die Wirkung der Verschiebungsänderung reduziert sich also darauf, dass in das betrachtete Volumen durch die Seite AA eine Menge adb des Fluidums eingeführt und durch die Seite BB eine gleiche Menge aus demselben hinausgetrieben wurde, d. h. dass die Menge adb des Fluidums von der Lage $AAA'A'$ zur Lage $BBB'B'$ übertragen wurde. Die für die Änderung der Verschiebung geleistete Arbeit ist diejenige, die notwendig ist, um diese Verlegung auszuführen. Wenn $\mathfrak{H}$ der Wert der Kraft und θ der Winkel derselben mit der Verschiebung b ist, so wirkt auf die Masse adb eine Kraft $adb\mathfrak{H}$, welche als Tangentialkomponente den Wert $adb\mathfrak{H}\cos\theta$ hat und folglich zur Bewegung der Masse längs der Wegstrecke l die Arbeit

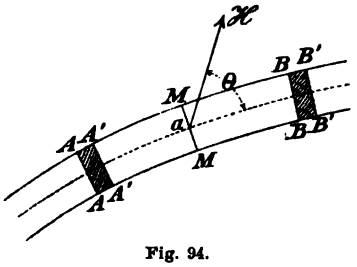

Fig. 94.

$$l a db \mathfrak{H} \cos\theta$$

verrichtet.

Dies ist der Ausdruck der in dem betrachteten Teile der Röhre geleisteten Arbeit, und da dieser Teil das Volumen la besitzt, so können wir die für die Volumeneinheit geleistete Arbeit durch folgende Formel ausdrücken:

$$w = \mathfrak{H} db \cos\theta. \tag{25}$$

Wir werden später sehen, dass die Erfahrung diesen Ausdruck für die Arbeit, die einer thatsächlichen Verschiebung entspricht, bei den durch elektrische Ströme hervorgebrachten magnetischen Feldern bestätigt; einstweilen können wir ihn ohne weiteres auf die schon betrachteten magnetischen Felder ausdehnen.

Betrachten wir zunächst den wichtigen, besonderen Fall, dass $\theta = 0$

und folglich $\mathfrak{H}$ und b gleichgerichtet seien, den Fall, welcher einem lediglich von der Kraft $\mathfrak{H}$ in einem homogenen Medium erzeugten magnetischen Felde entspricht. Die für die Volumeneinheit zu leistende Arbeit ist dann von dem Ausdrucke

$$w = \mathfrak{H}\, db$$

gegeben, welcher noch in die Form

$$w = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\, d\mathfrak{B} \tag{26}$$

gebracht werden kann.

Wenn die Kurve, die als Abscissen die Werte von $\mathfrak{H}$ und als Ordinaten diejenigen von $\mathfrak{B}$ hat, gegeben ist, so ist es leicht, die graphische Darstellung der Arbeit für die Volumeneinheit zu finden, welche von einer unendlich kleinen oder einer endlichen Änderung der Induktion verursacht wird.

Die Kurve AB (Fig. 95) möge die Abhängigkeit der Grösse $\mathfrak{B}$ als einer Funktion von $\mathfrak{H}$ darstellen. Betrachten wir einen Punkt M mit der Abscisse mM, und geben wir der Ordinate Om einen unendlich kleinen Zuwachs

$$mn = d\mathfrak{B},$$

wodurch sich als neue Abscisse der Wert nN ergiebt. Die unendlich kleine Fläche $MmnN$ stellt uns, abgesehen von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung, das Produkt $\mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$ und folglich die der Variation $d\mathfrak{B}$ entsprechende Arbeit w, multipliziert mit 4π, dar. Wenn man nun eine endlich grosse Änderung der Induktion betrachtet, welche nach der Linie AB stattfindet, so ist die gesamte Arbeit

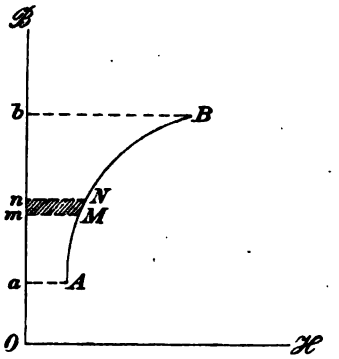

Fig. 95.

$$W = \frac{1}{4\pi}\int_{0a}^{0b} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$$

die Summe vieler Elementararbeiten, die alle, abgesehen von einem konstanten Faktor, von einer Fläche wie $MmnN$ dargestellt sind; folglich wird die gesamte Arbeit durch die ganze Fläche $AabB$ dargestellt.

Die von den magnetischen Kräften eines Feldes, in welchem die Induktion eine gegebene Änderung erfährt, für die Volumeneinheit geleistete Arbeit wird, abgesehen von dem konstanten Faktor $\left(\frac{1}{4\pi}\right)$, *durch den Inhalt der Fläche ausgedrückt, welche von der Induktionskurve, der Ordinatenachse und den Abscissen der äussersten Punkte der Kurve begrenzt wird.*

89. Hysteretische Körper. Zyklische Magnetisierungsprozesse. — Betrachten wir einen Körper, welcher die Erscheinungen der magnetischen Hysteresis zeigt, und unterwerfen wir denselben einer zyklischen Magnetisierung $AMBM_1A$ (Fig. 96). Während die Induktion vom Werte Oa zum Werte Ob wächst, leisten die Kräfte des Feldes für die Volumeneinheit des Körpers eine positive, von der Fläche $aAMBba$ dargestellte Arbeit. Während dagegen die Induktion wieder zum Werte Oa längs des fallenden Astes BM_1A, für welchen $d\mathfrak{B}$ negativ ist, abnimmt, leisten die Kräfte des Feldes eine negative, von der Fläche $BbaAM_1B$ ausgedrückte Arbeit. Die gesamte von den Kräften des Feldes verrichtete Arbeit, wenn der Körper den vollständigen Zyklus durchläuft, ist also von der Differenz der beiden betrachteten Flächen, d. h. vom Flächeninhalte der den Zyklus bildenden Kurven dargestellt.

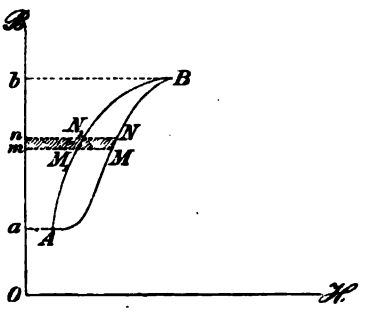

Fig. 96.

Die von den magnetischen Kräften für die Volumeneinheit eines Körpers, in welchem die Induktion durch einen vollständigen Zyklus hindurchgeht, geleistete Arbeit wird durch den Flächeninhalt der Zykluskurven, dividiert durch 4π, ausgedrückt.

Wie wir bereits bemerkt haben, wird ein magnetischer Zyklus immer so durchlaufen, dass das fallende Stück oberhalb liegt und folglich dieser Flächeninhalt positiv ist. Deswegen ist die von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit, wenn ein Körper einen magnetischen Zyklus durchläuft, jeweilig als eine verausgabte Arbeit aufzufassen, deren Äquivalent man als Wärme in dem Medium, worin die Induktion variiert, wiederfindet.

Bei jenen Zyklen, welche zwischen entgegengesetzt gleichen Werten der magnetischen Kraft und Induktion durchlaufen werden, hängt der Flächeninhalt der Zykluskurven und folglich auch die aufgewandte Arbeit, wenn das Material gegeben ist, lediglich von den Maximalwerten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ ab. Diese Funktionen wird man aus den experimentellen Ergebnissen ableiten müssen. Ewing und Hopkinson stellten, indem sie den Flächeninhalt der verschiedenen Zyklen massen und durch 4π dividierten, Tabellen auf, welche für verschiedene Materialien die für die Volumeneinheit aufgewandte Arbeit als eine Funktion des Maximalwertes von $\mathfrak{B}$ ergeben. Steinmetz fand, dass die experimentellen Resultate in die folgende Formel

(27) $$W = \eta \mathfrak{B}^{1.6}$$ *)

zusammengefasst werden können, wobei W die Arbeit bedeutet, die man für die Volumeneinheit des Materials aufwenden muss, um sie einen magnetischen Zyklus zwischen zwei gleichen und entgegengesetzten Werten $+\mathfrak{B}$ und $-\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion durchlaufen zu lassen, und η eine vom Material abhängende Konstante bedeutet. Für weiches, ausgeglühtes, sehr reines Eisen kann man

$$\eta = 0.002$$

annehmen.

Die Steinmetz'sche Formel eignet sich ziemlich gut zu den praktischen Berechnungen der Werte von $\mathfrak{B}$, welche dem merklich geradlinigen, steilen Teile der Kurve entsprechen. Neuere Versuche haben erwiesen, dass man für Werte von $\mathfrak{H}$ in der Nähe des Knies M, in der Formel (27) für den Exponenten von $\mathfrak{B}$ einen grösseren, näher bei 2 liegenden Wert annehmen muss.

90. Körper ohne Hysteresis. Feldenergie. — Betrachten wir jetzt einen Körper, in welchem die magnetische Induktion einfach der magnetischen Kraft proportional ist, sodass die Beziehungen bestehen

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad J = \varkappa \mathfrak{H}.$$

Dies findet in der Luft und allgemein in allen wenig magnetischen und diamagnetischen Materialien statt.

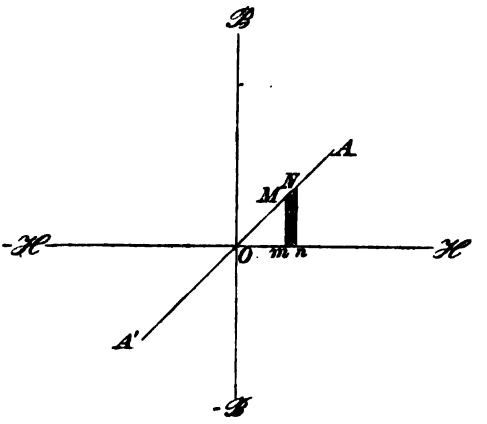

Fig. 97.

In diesem Falle wird die Linie der magnetischen Induktion zu einer durch den Ursprung hindurchgehenden Geraden OA (Fig. 97).

Stellen wir uns vor, wir lassen in dem Körper die magnetische Kraft vom Werte $\mathfrak{H}_1 = Om$ zum Werte $\mathfrak{H}_2 = On$, und folglich die Induktion vom Werte $\mathfrak{B}_1 = mM$ zum Werte $\mathfrak{B}_2 = nN$ variieren.

Wir können die zur Erzeugung dieser Änderung für die Volumeneinheit aufzuwendende Arbeit als eine Funktion von $\mathfrak{H}$ oder von $\mathfrak{B}$ leicht ausdrücken.

In dem allgemeinen Ausdrucke der Arbeit

*) In der Formel (27) ist die Arbeit in Erg pro cm³ ausgedrückt, wenn die magnetische Kraft und Induktion in absoluten C. G. S.-Einheiten angegeben sind.

$$W = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$$

ersetzen wir $\mathfrak{H}$ durch den Wert $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}$ und integrieren wir zwischen den Grenzen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$:

$$W = \frac{1}{4\pi\mu}\int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi\mu}(\mathfrak{B}_2^2 - \mathfrak{B}_1^2).$$

Im besonderen muss man, um im Körper eine Änderung der Induktion vom Werte Null zum Werte $\mathfrak{B}$ hervorzubringen, eine Arbeit

$$W = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}$$

aufwenden.

Dieselbe Arbeit kann als eine Funktion von $\mathfrak{H}$ allein ausgedrückt werden; indem man in die vorige Formel für $\mathfrak{B}$ den Ausdruck $\mu\mathfrak{H}$ einsetzt, erhält man:

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2;$$

oder als Funktion von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$

$$W = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{8\pi}.$$

Setzt man im besonderen in den gefundenen Ausdrücken $\mu = 1$, was mit genügender Annäherung für die unmagnetischen und diamagnetischen Körper zutreffend ist, so wird man folgende Ausdrücke für die zur Veränderung der Induktion und der Kraft vom Werte Null bis zum Werte $\mathfrak{B}$ bezw. $\mathfrak{H}$ für die Volumeneinheit zu verrichtende Arbeit finden:

$$W = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}{8\pi}.$$

Die Arbeit kann ferner als Funktion der magnetischen Kraft und Verschiebung ausgedrückt werden. Indem man in dem Ausdrucke $W = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{8\pi}$ $\mathfrak{B} = 4\pi b$ setzt, hat man

$$W = \frac{1}{2} b\mathfrak{H}. \tag{38}$$

Dieser Ausdruck ist dem durch die Formel (12) [45] gegebenen ganz analog, (der die elektrische Arbeit als Funktion der elektrischen Kraft und Verschiebung angiebt) und ist ferner analog dem Ausdrucke der Arbeit, mit der durch eine gegebene Kraft eine Deformation in einem vollkommen elastischen Körper erzeugt wird.

Lassen wir einen Körper, dessen Permeabilität μ konstant ist, einen magnetischen Zyklus durchlaufen, lassen wir nämlich in demselben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ nach einem beliebigen Gesetze variieren, aber so, dass dieselben

ihre ursprünglichen Werte wieder annehmen. Es passiert dann, weil jedem Werte von $\mathscr{H}$ ein einziger Wert von $\mathscr{B}$ entspricht, die Grösse $\mathscr{B}$ in der fallenden Reihe dieselben Werte, die sie für gleiche Werte von $\mathscr{H}$ in der steigenden Reihe besass; die beiden Äste des Zyklus fallen in eine einzige Strecke MN der Geraden OA zusammen, die zweimal, aber in verschiedenem Sinne, durchlaufen wird. Der Flächeninhalt des Zyklus, und folglich auch die gesamte Arbeit, die aufgewandt wurde, um den Körper der zyklischen Magnetisierung zu unterwerfen, verschwindet; die Arbeit, die bei dem steigenden Ast aufgewandt wurde, wird bei dem sinkenden Ast vollständig zurückgegeben. Ein magnetisches Feld stellt uns also eine *potentielle Energie* dar; um das Feld zu erzeugen, muss man für die Volumeneinheit eine Arbeit $\frac{1}{2} b\mathscr{H}$ aufwenden, welche in demselben aufgespeichert bleibt und vollständig zurückerstattet wird, sobald die magnetische Verschiebung aufhört.

Bei den hysteretischen Körpern dagegen wird nicht die ganze zur Erzeugung des Feldes aufgewandte Arbeit zurückgegeben, sobald dasselbe verschwindet; infolge des Vorhandenseins der Hysteresis wird ein Teil dieser aufgewandten Arbeit in Form von Wärme verzehrt.

Viertes Kapitel.

Elektromagnetismus.

§ 1.

Magnetische Felder, welche durch Änderungen der elektrischen Verschiebung erzeugt werden.

91. Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme. Geradlinige und kreisförmige Strombahn. Solenoid. — Wir haben uns mit dem Studium der elektrischen und magnetischen Erscheinungen befasst, indem wir sie beide unabhängig von einander betrachtet haben. In einem und demselben Raume können aber auch ein elektrisches und ein magnetisches Feld zusammen existieren; diese Felder sind von einander unabhängig, so lange beide konstant bleiben; wenn aber der Zustand eines von beiden sich ändert, so entstehen auch in dem anderen Felde Änderungen, und ihre gegenseitige Unabhängigkeit hört dann auf.

Die allgemeinen Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen können in zwei Prinzipien, wie folgt, zusammengefasst werden:

Jedesmal, wenn die elektrische Verschiebung sich mit der Zeit ändert, entstehen magnetische Kräfte.

Jedesmal, wenn die magnetische Verschiebung sich mit der Zeit ändert, entstehen elektromotorische Kräfte.

Wir werden sehen, dass die hervorgebrachten Kräfte in beiden Fällen durch dasselbe Gesetz mit den Änderungen der Verschiebung in Beziehung stehen.

Es bieten sich also unserem Studium zwei neue Klassen von Erscheinungen dar, nämlich die in einem magnetischen Felde von einer Änderung der elektrischen Verschiebung, und die in einem elektrischen Felde von einer Änderung der magnetischen Verschiebung hervorgebrachten Veränderungen.

Wir werden uns vorerst mit den von einer Änderung der elektrischen Verschiebung hervorgebrachten magnetischen Wirkungen beschäftigen.

Es wird zweckmässig sein, zuerst der Grösse und dem Vorzeichen nach konstante Änderungen der elektrischen Verschiebung, d. h. Gleichströme ins Auge zu fassen; wir werden nachher unser Studium auf den Fall von beliebig veränderlichen Strömen leicht ausdehnen können.

Ein elektrischer Gleichstrom erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld. Es ist in dieser Hinsicht der Versuch von Oersted grundlegend, welcher bewies, dass eine parallel zu einem von Gleichstrom durchflossenen, geradlinigen Leiter angeordnete Magnetnadel abgelenkt wird und sich senkrecht zu dem Stromträger einzustellen sucht. Betrachten wir beispielsweise einen sehr langen, senkrecht zu der Figurebene stehenden Draht, der von einem in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten gerichteten Strom i durchflossen wird (Fig. 98).*)

Im Raume um den Leiter i hat man ein magnetisches Feld. Wenn man in einen Punkt P eine nordmagnetische Masse setzt, so erfährt diese einen Bewegungsantrieb senkrecht zur Ebene iP in der Richtung des Pfeiles; bei entgegengesetzter Stromrichtung würde die Richtung der Kraft eine entgegengesetzte sein. Stellt man in P eine Magnetnadel auf, so wirkt auf deren Pole ein Kräftepaar, welches das Bestreben hat, die Nadel senkrecht zum Stromträger zu stellen.

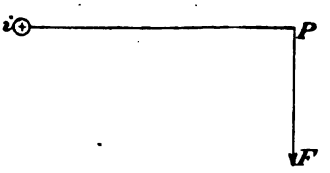

Fig. 98.

In diesem einfachen Falle einer geradlinigen Strombahn dienen uns folgende Regeln zur Bestimmung der Richtung des magnetischen Feldes.

Ampère'sche Schwimmregel. — Denkt man sich in dem Leiter in der Richtung des Stromes schwimmend, und betrachtet man die Magnetnadel, so wird ihr Nordpol nach der Seite der linken Hand abgelenkt. Nennen wir der Kürze halber linke und rechte Seite des Stromträgers die linke und rechte Seite des schwimmenden Beschauers und einfach Strom den Stromträger, so können wir sagen:

Das von einem geradlinigen Strom erzeugte magnetische Feld ist in jedem Punkte nach der linken Seite des Stromes gerichtet.

*) Indem wir einer von Prof. Silvanus P. Thompson vorgeschlagenen Bezeichnung folgen, werden wir die Richtung des Stromes in dem Schnitte eines Leiters mit der Figurebene mit einem Punkt oder mit einem Kreuz, je nachdem der Strom von hinten nach vorn oder umgekehrt gerichtet ist, darstellen. Der Punkt bedeutet die dem Beschauer zugewandte Spitze des Pfeiles, das Kreuz stellt dagegen die Feder des Pfeiles dar, der sich vom Beschauer entfernt. Dasselbe gilt auch, um die Richtung der Kraft- und Induktionslinien in solchen Fällen anzudeuten.

Maxwell'sche Regel. — Stellt man sich einen gewöhnlichen Korkzieher oder allgemein eine rechtsgängige Schraube mit der Achse in der Richtung des Stromes so angeordnet vor, dass die Spitze nach derselben weist, so ist die Richtung der Kraft diejenige, in welcher man das Heft des Korkziehers drehen muss, damit er in der Richtung des Stromes fortschreitet.

Wir können uns den Korkzieher auch anders angeordnet denken, und zwar so, dass seine Achse mit einer durch den Punkt P (Fig. 98) gehenden, die Ebene iP senkrecht durchsetzenden Geraden zusammenfällt. Wenn man nun den Griff des Korkziehers derart dreht, dass dessen näher nach i hin liegender Teil in einem mit der Richtung von i übereinstimmenden Sinne sich bewegt, so schreitet der Korkzieher in der Richtung der Kraft fort.

Indem man diese beiden Regeln in eine zusammenfasst, kann man sagen:

Die Richtung eines geradlinigen Stromes und die des von ihm herrührenden magnetischen Feldes stehen in demselben Zusammenhang, wie die rotierende und die fortschreitende Bewegung bei einem gewöhnlichen Korkzieher oder einer rechtsgängigen Schraube.

Stellen wir uns nun, anstatt eines geradlinigen Teiles eines Stromes, einen vollständigen Stromkreis vor; wir können uns leicht über das von demselben herrührende magnetische Feld Klarheit verschaffen, indem wir beachten, dass ein kleiner Teil des Stromkreises als geradlinig angesehen werden kann, und dass auf diesen die dargelegten Prinzipien angewandt werden können.

Betrachten wir z. B. den von einem Strome mit der Stärke i durchflossenen Stromkreis AB (Fig. 99). In einem beliebigen innerhalb des Stromkreises liegenden Punkte P bringen die einzelnen Stromelemente Kräfte hervor, welche die gleiche Richtung, in bezug auf die Figurebene von hinten nach vorn, besitzen, und welche sich folglich addieren. Dagegen bringen in einem äusseren Punkte P' die Teile B und A des Stromkreises entgegengerichtete Kräfte hervor; es überwiegt natürlich die Wirkung des näher nach dem Punkte P' hin liegenden Teiles des Stromkreises; und es wird in dem Punkte P' eine Kraft hervorgebracht, welche in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten gerichtet ist. In diesem Felde hat also die Kraft in allen innerhalb des Stromkreises gelegenen Punkten P die gleiche Richtung, und so auch in

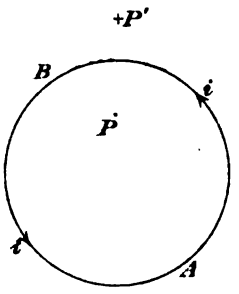

Fig. 99.

allen äusseren P', aber die Richtung in den äusseren Punkten ist derjenigen in den inneren entgegengesetzt.

In Fig. 100 geben wir aus dem Lehrbuche der Elektrizität und des

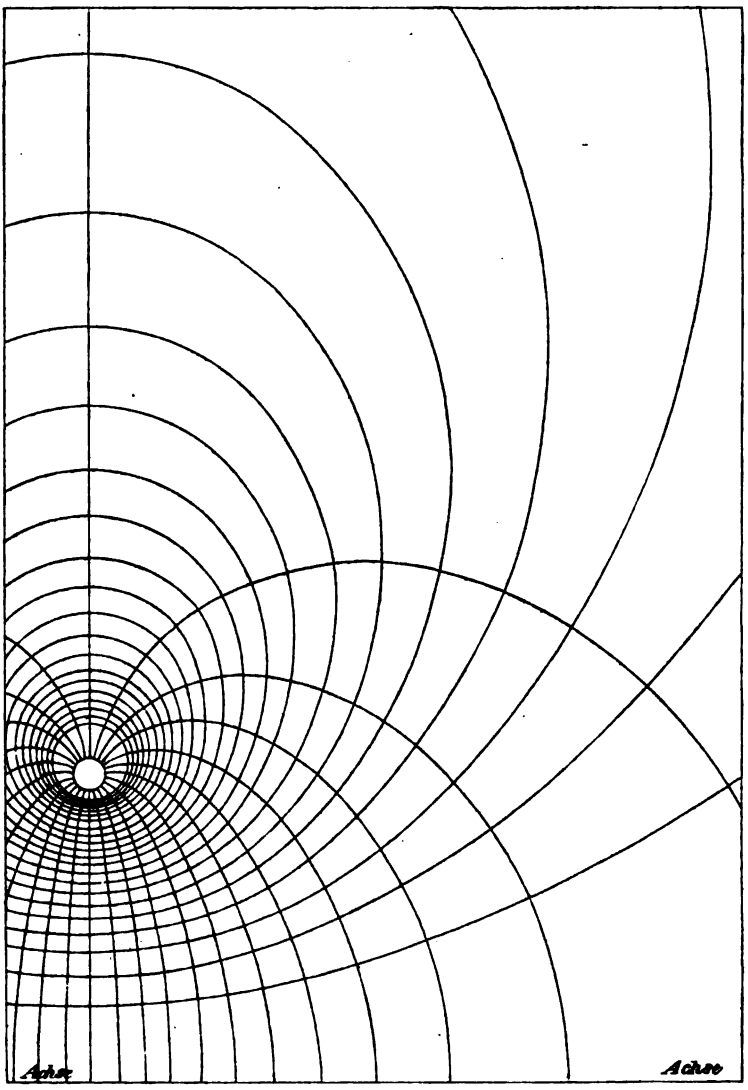

Fig. 100.

Magnetismus von Prof. Clerk Maxwell die Zeichnung der Niveauflächen und Kraftlinien in dem von einem Kreisstrome erzeugten magnetischen Felde wieder, und zwar stellt die Bildebene eine durch die Achse des

Stromkreises gelegte Ebene dar. Die Kraftlinien sind geschlossene Linien, die sämtlich die Spur, welche die Fläche des Stromkreises in der Figurebene bildet, einmal durchsetzen; diejenige Kraftlinie, die durch das Zentrum der von der Strombahn umschriebenen Kreisfläche geht, ist eine Gerade, die sich im Unendlichen schliesst.

Die Richtung des magnetischen Feldes kann leicht durch die Ampère'sche Regel gefunden werden; wenn man in der Richtung des Stromes schwimmt, so sind die Kraftlinien immer nach der linken Seite gerichtet; je nachdem man nach innen oder nach aussen blickt, hat man die Richtung des Feldes in den inneren oder äusseren Punkten. Man kann sich auch der Maxwell'schen Regel bedienen; wenn man den Korkzieher auf die Achse (Fig. 100) legt und ihn in demselben Sinne, wie ihn der Kreisstrom i angiebt, rotieren lässt, so schreitet er in der Richtung des Feldes fort; wenn man ihn dagegen auf den Stromkreis legt, so ist der Sinn, in welchem man ihn drehen muss, damit er in der Richtung des Stromes fortschreitet, auch derjenige der Kraftlinien.

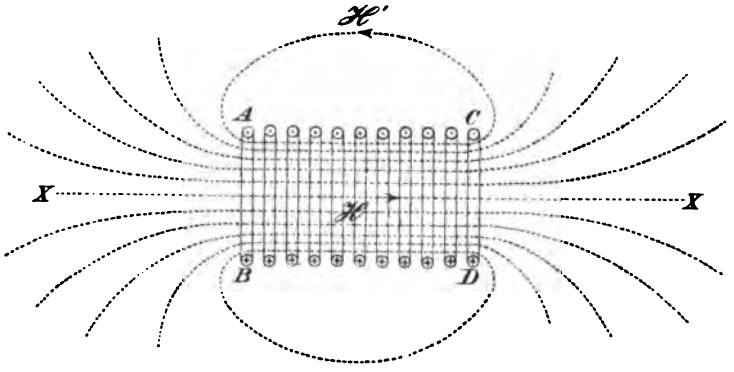

Fig. 101.

Nachdem wir nun die allgemeine Anordnung der Kraftlinien in dem von einem einfachen Kreisstrom erzeugten Felde betrachtet haben, können wir uns sogleich auch ein Bild von den Feldern machen, die von komplizierteren Systemen herrühren. Der wichtigste von allen ist der Fall der Solenoide.

Man nennt *Solenoid* ein System von Strömen mit gleicher Intensität, welche gleiche, geschlossene Bahnen durchlaufen, die senkrecht zu der Linie stehen, welche den geometrischen Ort ihrer Mittelpunkte bildet und *Achse des Solenoids* heisst.

Wir werden den einfachen Fall eines zylindrischen Solenoids betrachten, in welchem die Strombahnen kreisförmig und gleichmässig verteilt sind, und in welchem die Achse des Solenoids geradlinig ist (Fig. 101).

Jeder der Kreisströme bringt Kraftlinien hervor, welche im Innern die Richtung $\mathfrak{H}$ und aussen in der Mitte die entgegengesetzte Richtung $\mathfrak{H}'$ haben. Der Komplex aller Kreisströme wird uns ein Bündel von Kraftlinien geben, welche das Solenoid in dem Sinne von $\mathfrak{H}$ mit einer mittleren Richtung parallel zu dessen Achse durchdringen, von dem rechten Ende ausgehen und sich ausserhalb des Solenoids schliessen; die Richtung des Feldes findet man leicht, indem man die Regel von Maxwell oder die von Ampère anwendet.

Ein System, welches sich praktisch wie ein Solenoid verhält, wird uns von einer Stromspirale mit gleichmässig verteilten Windungen geliefert. Wenn die Ganghöhe genügend klein ist, so wird man jede Windung als aus einer ebenen, kreisförmigen Strombahn und einer geradlinigen Verbindungsstrecke bestehend ansehen können; auf diese Weise ist eine Stromspirale mit dem System eines Solenoids und eines zur Achse parallelen, geradlinigen Stromes gleichwertig. Die Wirkung dieses Stromes kann man immer aufheben, indem man den Strom durch einen geradlinigen Draht von dem Ende, bei welchem er aus der Spirale austritt, zu dem, bei welchem er in die Spirale eintritt, zurückführt; im allgemeinen ist jedoch diese Wirkung so klein, dass man sie vernachlässigen und die Spirale wie ein einfaches Solenoid behandeln kann.

92. Analogie zwischen den von elektrischen Strömen und den von Magneten hervorgerufenen Feldern. — Die einfache Betrachtung des von einem Solenoid erzeugten Feldes (Fig. 101) führt sogleich die Ähnlichkeit vor Augen, die es mit dem von einem zylindrischen, in der Richtung J gleichförmig magnetisierten Körper erzeugten Felde besitzt (Fig. 81). In beiden Fällen gehen die Kraftlinien von einer Grundfläche des Zylinders aus und kommen bei der anderen an, indem sie ausserhalb des Magneten und des Solenoids dieselbe Anordnung zeigen.

Die Analogie zwischen beiden Feldern besteht nicht nur in der Verteilung der Kraftlinien, sondern sie ist vollkommen; alle Eigentümlichkeiten der von magnetischen Massen hervorgerufenen Felder sind auch bei den durch elektrische Ströme erzeugten Feldern vorhanden. Auch in diesen Feldern findet eine magnetische Induktion oder Influenz statt, durch welche sich ein ins Feld gebrachter Körper in der Richtung der Kraft magnetisiert, wenn er paramagnetisch ist, und in der entgegengesetzten, wenn er diamagnetisch ist. Wenn man z. B. in das Innere eines Solenoids einen Eisenkern bringt, so magnetisiert er sich, indem er einen Nordpol links, einen Südpol rechts von der Stromrichtung aufweist, wenn man sich, das Gesicht dem Innern des Solenoids zugekehrt, in der Strombahn mit dem Strome schwimmend vorstellt. Man hat so ein Mittel, mächtige

temporäre Magnete herzustellen, welche *Elektromagnete* genannt werden. Wenn der Kern, anstatt aus weichem Eisen, aus Stahl besteht, so behält er, seiner erwähnten Eigenschaften halber, nach dem Aufhören des magnetisierenden Stromes einen Teil der Magnetisierung bei; dies ist das einfachste Verfahren zur Herstellung permanenter Magnete.

Die elektrischen Kreisströme sind Magneten gleichwertig, nicht nur bezüglich der Wirkungen, die jene auf Magnete, sondern auch bezüglich derjenigen, welche die Magnete auf die Ströme und endlich die Ströme unter sich ausüben.

Bekannt sind in dieser Hinsicht die Versuche über die Richtwirkung eines magnetischen Feldes auf ein Solenoid und über die Wirkungen zwischen Magneten und Solenoiden und zwischen Solenoiden untereinander, welche beweisen, dass ein Solenoid sich vollständig wie ein Magnet verhält, dessen Nordpol links vom Strome liegt.

93. Prinzip der Äquivalenz. — Die Erfahrung lehrt, dass das von einem elektrischen Strome erzeugte magnetische Feld in allen praktischen Fällen, wie die Verhältnisse des Stromkreises auch seien, dem von einem passenden Magneten erzeugten Felde in allen seinen Eigenschaften gleichwertig ist; wir sind also zu der Annahme berechtigt, dass dies auch für unendlich kleine Ströme der Fall sei.

Betrachten wir einen unendlich kleinen, geschlossenen, von einem elektrischen Strome durchflossenen Stromkreis AB (Fig. 102). Durch die Wirkung des Stromes entsteht eine magnetische Verschiebung, welche den Stromkreis AB von der linken nach der rechten Seite des Stromes durchsetzt und sich aussen schliesst. Wenn wir uns nun im Mittel-

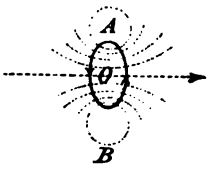

Fig. 102.

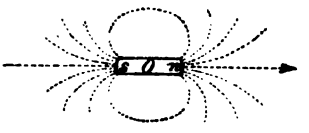
Fig. 103.

punkte O (Fig. 103) einen Elementarmagneten, mit der Achse normal zu der Stromebene und mit dem Nordpol links von dem Strome angeordnet, denken, so hat man auch in diesem Falle eine magnetische Verschiebung in derselben Richtung. Die vom Strome und vom Magneten hervorgebrachten magnetischen Verschiebungen sind identische Phänomene derselben Natur, und die Verteilung der Kraftlinien aussen ist ebenfalls analog; es ist also natürlich, dass die Fernwirkungen der beiden Systeme gleichwertig sind, wenn unter den Grössen, die dieselben bestimmen,

gewisse Beziehungen bestehen. Weil die Wirkungen eines Elementarmagneten in die Ferne nicht von seinen Dimensionen, sondern lediglich von seinem magnetischen Moment abhängen, so folgt, dass für die Äquivalenz des Stromes und des Elementarmagneten das magnetische Moment des Magneten eine bestimmte Funktion der Stromstärke und der Dimensionen des Stromkreises sein muss.

Wenn wir zwei Elementarmagnete in einer beliebigen Weise vereinigen, ohne die Verteilung des Magnetismus, d. h. ohne das magnetische Moment abzuändern, so ist das System noch ein Magnet, dessen magnetisches Moment die Summe der magnetischen Momente der einzelnen komponierenden Magnete ist. Wenn diese gleich und so verbunden sind, dass beide das Nordende nach derselben Seite wenden, so ist das magnetische Moment des Systems, nach der Definition des magnetischen Moments selbst [64], doppelt so gross wie das magnetische Moment eines jeden Magneten.

Dieses Prinzip legt die Annahme nahe, dass das magnetische Moment eines Magneten, welcher dem System zweier gleicher, einander nahe liegender Ströme äquivalent ist, das Doppelte des magnetischen Moments von zwei Magneten ist, deren jeder einem einzelnen der Ströme äquivalent ist.

Es seien zwei gleiche Stromträger von der Form eines Rechtecks vorhanden, welche beide je eine Fläche vom Inhalt dS umschliessen und von einem Strome mit der Stärke i durchflossen werden. Wenn wir die Stromkreise zur Deckung bringen, und zwar so, dass beide vom Strome in derselben Richtung durchflossen werden, so ist das hieraus resultierende System in bezug auf seine Wirkung in die Ferne augenscheinlich einem Strome mit der Stärke $2i$, der einen der Stromkreise durchfliesst, äquivalent; andererseits ist nach dem Gesagten das magnetische Moment des dem System beider aufeinandergelegter Ströme äquivalenten Magneten doppelt so gross wie jenes, welches einem einzigen Strome entspricht; folglich wird dadurch, dass man den Strom verdoppelt, auch das magnetische Moment des äquivalenten Magneten verdoppelt.

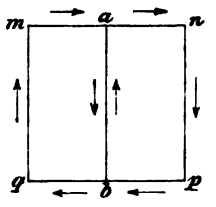

Fig. 104.

Wenn man dagegen die beiden Stromkreise so nebeneinander setzt (Fig. 104), dass eine Seite des einen auf eine Seite des anderen zu liegen kommt, und dass dieselben von dem Strome in der von den Pfeilen angedeuteten Richtung durchflossen werden, so wird die gemeinsame Seite ab von zwei entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben. Dieses System ist also einem einzigen Strome mit der Stärke i äquivalent, welcher den Stromkreis $mnpq$ vom doppelten Flächeninhalte durchfliesst. Nach

dem oben Gesagten ist das magnetische Moment des diesem System äquivalenten Magneten das Doppelte des einem einzigen der Stromkreise entsprechenden magnetischen Momentes; es wird also durch Verdoppelung des Inhaltes der vom Stromkreise umschlossenen Fläche (Stromfläche) das magnetische Moment des äquivalenten Magneten ebenfalls verdoppelt.

Es folgt, dass das magnetische Moment des Elementarmagneten, welcher einem gegebenen, in einem unendlich kleinen Stromkreise fliessenden Strome gleichwertig ist, der Stromstärke und dem Inhalte der Stromfläche proportional ist. Bedeutet $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment des äquivalenten Magneten, i die Stromstärke, dS den Inhalt der Stromfläche und h eine Proportionalitätskonstante, so können wir schreiben

$$d\mathfrak{M} = hidS. \tag{1}$$

Wir können mithin folgenden Grundsatz aufstellen:

Ein in einem unendlich kleinen Stromkreise fliessender Strom bringt im Raume ein magnetisches Feld hervor, welches demjenigen analog ist, das von einem Elementarmagneten herrührt, welcher sich im Mittelpunkte des Stromkreises befindet, seinen Nordpol links vom Strome hat und dessen Achse senkrecht zur Stromebene ist; es besteht Äquivalenz zwischen beiden Feldern, d. h. die Wirkungen des Stromes und des Magneten in die Ferne sind gleich, wenn das magnetische Moment des Magneten dem Produkte aus der Stromstärke und der Stromfläche proportional ist.

Wir sind auf das Prinzip der Äquivalenz durch einfache Erwägungen gekommen, indem wir von der Analogie ausgingen, welche die Erfahrung in allen praktischen Fällen zwischen den von elektrischen Strömen und von permanenten Magneten hervorgebrachten Feldern nachweist. Dieses Prinzip wird von den Versuchen bestätigt, die von Ampère und später in strengerer Weise von Wilhelm Weber ausgeführt worden sind; es findet seine weitere Bestätigung darin, dass alle von diesem Prinzip abgeleiteten Folgerungen durch die Erfahrung sich als richtig erweisen.

Wir wollen noch bemerken, wie es Ampère in seiner genialen Theorie der elektrodynamischen Phänomene gelang, die Kräfte, welche die Ströme sowohl unter sich, wie auch auf die Magnete ausüben, so auszudrücken, als ob dieselben von den einzelnen Stromelementen herrührten, und daraus das Prinzip der Äquivalenz abzuleiten und zum ersten Male auszusprechen. Wir machen umgekehrt das Prinzip der Äquivalenz, indem wir es in der oben erläuterten Weise als streng richtig und allgemein giltig voraussetzen, zur Grundlage unseres Studiums und leiten daraus alle Eigentümlichkeiten der von elektrischen Strömen erzeugten magnetischen Felder ab.

94. Äquivalenz zwischen einem magnetischen Blatte und einem Strome im endlichen, geschlossenen Kreise. Elektromagnetisches Masssystem. — Wenden wir das Prinzip der Äquivalenz auf einen Strom in einem geschlossenen, nicht unendlich kleinen Kreise an.

AB sei ein beliebiger Stromkreis (Fig. 105) mit endlichem Flächeninhalt, von einem Gleichstrome mit der Stärke i in der Richtung des Pfeiles durchflossen. Stellen wir uns eine beliebige, von der Linie AB begrenzte Fläche vor, und zerteilen wir dieselbe in unendlich kleine Flächenelemente mittels zweier Systeme von Linien, die nach einem beliebigen Gesetze gezogen sind. Denken wir uns die Begrenzung eines jeden dieser Elemente von einem Strome in derselben Richtung und mit derselben Stärke i durchflossen. Bezüglich der Wirkungen in die Ferne ist der Komplex dieser Ströme dem einzigen Strom in AB äquivalent. In der That, betrachten wir eine beliebige Trennungsseite ab zwischen zwei benachbarten Elementen p und q; dieselbe ist, weil jedem der beiden Elemente p und q angehörig, von zwei gleichen und entgegengerichteten Strömen durchflossen, welche entgegengesetzt gleiche, sich aufhebende Wirkungen hervorbringen. In bezug auf die äusseren Wirkungen ist es so, wie wenn alle Trennungsseiten zwischen zwei benachbarten Elementen nicht von einem Strome durchflossen wären; es bleiben folglich nur die Wirkungen der Ströme in jenen Seiten, die der Begrenzung der Fläche angehören, welche in ihrer Gesamtheit den einzigen Strom AB bilden. Dieser Strom AB kann also für die Fernwirkungen durch die Gesamtheit gleichstarker Ströme in den Elementarstromkreisen ersetzt werden. Nun ist jeder der Elementarströme einem kleinen Magneten mit der Achse senkrecht zu dem Flächenelement und mit dem Nordpol links vom Strome äquivalent; von diesem Magneten ist das magnetische Moment bestimmt, während dagegen die Form und die Dimensionen willkürlich sind. Wir können also annehmen, dass jeder Elementarmagnet aus einem kleinen Prisma aus magnetischem Material bestehe, welches als Schnitt die entsprechende Stromfläche hat und von zwei unendlich benachbarten Flächen begrenzt ist, von denen die eine auf der einen Seite der Fläche S, die andere auf der anderen Seite dieser Fläche liegt. Auf diese Weise bildet die Gesamtheit der Magnete eine kontinuierliche Schicht von magnetischer Substanz, welche eine Nordverteilung links, eine Südverteilung rechts vom Strome besitzt; ferner ist die Magnetachse und folglich auch die Richtung der Magnetisierung, da jeder

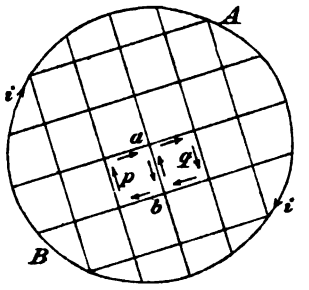

Fig. 105.

Magnet normal zu der Stromebene ist, in jedem Punkte zu der Fläche S oder, wenn wir wollen, zu den beiden Grundflächen normal. Der Komplex der Elementarmagnete bildet also ein magnetisches Blatt, welches hinsichtlich der magnetischen Wirkungen dem Strome AB gleichwertig ist.

Das betrachtete Blatt ist einfach, und zwar ist das magnetische Moment der einzelnen Elemente

$$d\mathfrak{M} = hidS,$$

folglich ist das magnetische Moment pro Flächeneinheit oder die Potenz des Blattes

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{M}}{dS} = hi, \tag{2}$$

d. h. $\mathfrak{P}$ ist konstant, weil die Stromstärke i für jeden Elementarstromkreis die gleiche ist.

Das Prinzip der Äquivalenz im Falle eines Stromes, welcher eine endliche Fläche umschliesst, kann also wie folgt ausgesprochen werden:

Ein elektrischer Strom in einem geschlossenen Stromkreise ist bezüglich seiner magnetischen Wirkungen einem einfachen magnetischen Blatte gleichwertig, welches den Stromkreis als Begrenzung und eine der Stromstärke proportionale Potenz besitzt. Die Nordseite dieses Blattes liegt (die Ampèresche Betrachtungsweise zu Grunde gelegt) links vom Beschauer.

Wir können die Polarität der beiden Seiten des Blattes auch mittels der Maxwell'schen Regel bestimmen.

In dem dem fraglichen geschlossenen Stromkreise äquivalenten magnetischen Blatte hat die Magnetisierung die Richtung, nach welcher ein Korkzieher fortschreiten würde, wenn das Heft in dem Sinne des Stromes i gedreht würde.

Die von uns betrachtete Fläche S ist eine willkürliche; es folgt daher, dass die Potenz und die Begrenzung bestimmt sind, aber nicht die Form des äquivalenten Blattes, welche ganz beliebig gewählt werden kann. Dies war vorauszusehen, weil in einem beliebigen Punkte des Feldes eines einfachen Blattes das Potential und die Kraft von der Form des Blattes unabhängig sind [76].

In den Ausdrücken (1) und (2) tritt eine Proportionalitätskonstante auf, welche keine einfache Zahl, sondern eine physikalische Grösse ist. Der Wert und die Dimensionen von h können, der Wahl der Masseinheiten entsprechend, verschieden sein. Wie man bei den Erörterungen über die Erscheinungen der Elektrostatik die elektrostatischen Einheiten so definiert hat, dass die Konstante k der Coulomb'schen Formel sich als absolute Zahl und gleich *Eins* ergiebt, so wird es bei den Aufgaben,

die wir jetzt behandeln, angebracht sein, eine neue Wahl der Einheiten so zu treffen, dass die Konstante h als absolute Zahl erscheint und gleich *Eins* wird. Man hat so ein neues Einheitssystem, welches das *elektromagnetische* genannt wird. Selbstverständlich wird man bei der Anwendung einer bestimmten Formel darauf Bedacht nehmen müssen, in welchem System die verschiedenen Grössen ausgedrückt sind; man wird leicht von einem zum anderen System übergehen können, wenn die Verhältnisse der Einheiten eines Systemes zu den entsprechenden des anderen bekannt sind. Wählt man elektromagnetische Einheiten, so hat man $h = 1$; folglich

$$(2') \qquad \mathfrak{P} = i.$$

Die Potenz des einem Strome äquivalenten einfachen Blattes ist numerisch gleich der in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückten Stromstärke.

Wenn man in der Gleichung (2') $\mathfrak{P} = 1$ setzt, ergiebt sich auch $i = 1$; man kommt so zu dem Satze:

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist die Stärke des Stromes, welcher, in einem geschlossenen Kreise fliessend, bezüglich der magnetischen Wirkungen einem einfachen Blatte mit der Potenz Eins gleichwertig ist.

95. Tragweite des Prinzips der Äquivalenz. — Die Theorie, die wir entwickelt haben, beruht auf Versuchen, die in dem Raume ausserhalb des äquivalenten Magneten ausgeführt wurden; die daraus von uns abgeleiteten Folgerungen gelten also, so lange wir in diesem Raume bleiben; sie gelten aber nicht mehr im Innern des Magneten.

Betrachten wir einen Strom von der Stärke i in einem Stromkreise AB (Fig. 106), den wir der Einfachheit halber als eben und senkrecht zu der Figurebene voraussetzen. Das äquivalente Blatt mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$ liege in der Ebene AB. Seine Dicke ist ganz willkürlich, und wir können annehmen, dass dieselbe den konstanten Wert λ besitze, sodass die Stärke der Magnetisierung

$$J = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} = \frac{i}{\lambda}$$

ebenfalls konstant ist.

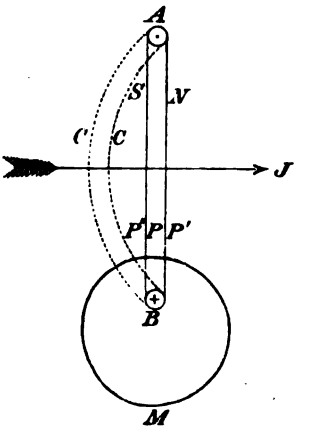

Fig. 106.

Die Verteilungen des Magnetismus auf den Seiten des Blattes sind entgegengesetzt gleich und besitzen die Dichte

$$\sigma = J = \frac{i}{\lambda}.$$

Betrachten wir einen Punkt P innerhalb des Blattes und unendlich nahe bei P zwei äussere Punkte P' und P'', je an einer Seite des Blattes gelegen, und berechnen wir die Kräfte, die das Blatt in diesen Punkten ausübt. Der Punkt P befindet sich in denselben Zuständen, wie ein Punkt, der sich in einem unendlich dünnen, im Magneten hergestellten Schlitze befindet: die Kraft hat in P eine der Magnetisierung entgegengesetzte Richtung und den Wert

$$\mathfrak{H} = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{\lambda}.$$

In den Punkten P' und P'' greifen Kräfte an, welche beide die Richtung der Magnetisierung besitzen. Es folgt daraus, dass die Kraft, welche auf die Einheitsmasse wirkt, wenn diese von einer zur anderen Seite eines magnetischen Blattes durch dasselbe übergeht, eine sprungweise Änderung erfährt, welche auch unendlich gross sein kann.

Betrachten wir dagegen die vom elektrischen Strome hervorgebrachten magnetischen Kräfte. In den Punkten P' und P'' ausserhalb des Blattes fällt die vom Strome mit der vom Blatte herrührenden Kraft zusammen, aber im Punkte P findet diese Übereinstimmung nicht mehr statt. Im Falle des Stromes ist der Punkt P von den nahe gelegenen Punkten P' und P'' durch keine singuläre Fläche getrennt, folglich ist die Feldstärke in P, abgesehen von unendlich kleinen Grössen, die gleiche wie in P' und P''. Wir können uns darüber noch besser Rechenschaft geben.

Uns daran erinnernd, dass das einem Strome äquivalente magnetische Blatt eine beliebige Form besitzen kann, wenn nur seine Begrenzung mit dem Stromkreise zusammenfällt, können wir uns das Blatt beliebig, z. B. nach der Fläche ACB (Fig. 106) angeordnet denken; die Kräfte, die dasselbe auf die drei äusseren, einander unendlich nahe gelegenen Punkte P', P und P'' ausübt, sind, abgesehen von unendlich kleinen Grössen, gleich; folglich sind auch die vom Strome herrührenden Kräfte gleich.

Man hat also zwischen beiden Feldern diesen wesentlichen Unterschied, dass, während im Felde des magnetischen Blattes die Seiten des Blattes selbst singuläre Flächen und die Kraftlinien offen sind, im Felde des elektrischen Stromes die Kraftlinien geschlossene Linien sind, welche aussen mit den vom Blatte hervorgebrachten Kraftlinien zusammenfallen und innen die Fortsetzung der äusseren bilden.

Der Stromkreis und die von ihm erzeugten Kraftlinien sind verkettet, d. h. man kann sie von einander nicht trennen, ohne die Kraftlinien oder den Stromkreis selbst aufzuschneiden.

Man kann indessen behaupten, dass es keine Verteilung von Magnetismus giebt, welche dasselbe Feld wie ein elektrischer Strom hervorbringt, und zwar deshalb, weil jede Verteilung von Magnetismus Diskon-

tinuitätsflächen aufweist, welche im Stromfelde nicht vorhanden sind. Die Äquivalenz zwischen Strömen und Magneten gilt ausserhalb, aber nicht innerhalb der Magnete.

Die Äquivalenz beider Felder ist dagegen vollständig, wenn man, anstatt der polar definierten Newton'schen Kraft $\mathfrak{K}$, die elektromagnetisch definierte Kraft $\mathfrak{H}$ oder (was dasselbe in dem magnetischen Masssystem ist, in welchem die numerischen Werte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ zusammenfallen) die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ betrachtet.

In beiden Fällen variiert die Induktion solenoidisch und weist keine Diskontinuitätsflächen auf; die Werte der Induktion in unendlich nahen Punkten wie P, P', P'' sind, wenn einer derselben innerhalb und die anderen ausserhalb des Blattes liegen, abgesehen von unendlich kleinen Grössen, gleich; die Induktionslinien sind geschlossen. Also:

In jedem Punkte des Feldes ist der Wert der vom elektrischen Strome hervorgerufenen Induktion gleich dem Werte der Induktion, die von dem äquivalenten Blatte herrührt.

Wenn im Felde des Stromes kein magnetisches Material vorhanden ist, haben magnetische Kraft und Induktion, wie bekannt, in jedem Punkte denselben Wert; wir können also sagen:

Ist im Felde kein magnetisches Material vorhanden, so ist der Wert der vom Strome herrührenden magnetischen Kraft gleich dem Werte der vom äquivalenten Blatte hervorgerufenen Induktion.

96. Geradliniger Strom. Gesetz von Biot und Savart. — Wenden wir das Prinzip der Äquivalenz auf einige von speziellen Stromsystemen hervorgebrachte Felder an.

Schliesst eine geschlossene Strombahn eine sehr grosse Fläche ein, und ist einer ihrer Teile geradlinig, so kann man in den nahe der Mitte dieses Teiles gelegenen Punkten die Wirkungen der anderen Teile vernachlässigen; somit stellt uns dieser praktische Fall den ideellen Grenzfall eines geradlinigen, sich im Unendlichen schliessenden, eine unendlich grosse Fläche begrenzenden Stromkreises dar.

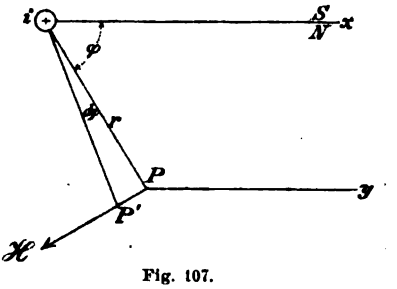

Fig. 107.

Betrachten wir (Fig. 107) einen geradlinigen, in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten gerichteten Strom i. Das einfache magnetische Blatt mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$,

welches diesem Strome gleichwertig ist, ist nur von der Geraden i begrenzt und erstreckt sich in willkürlicher Form bis ins Unendliche; wir können also dasselbe in die Ebene ix mit der Nordseite nach unten und der Südseite nach oben gelegt denken.

In einem beliebigen äusseren, im Abstande r von i gelegenen Punkte P hat die Kraft und folglich auch das Potential denselben Wert, gleichviel, ob sie vom Strome oder vom Blatte herrührt. Die Beziehung (15) [76] giebt uns den Wert des Potentials:

$$V = \mathfrak{P}\omega = i\omega,$$

In diesem Falle ist der Raumwinkel ω positiv, weil von P aus die Nordseite gesehen wird. Derselbe wird durch das auf der Kugel mit dem Radius *Eins* von der Ebene Pi und der zu xi parallelen Ebene Py bestimmte Kugelzweieck gemessen. Bezeichnet φ den Winkel $\widehat{Pix}$, so ist der Winkel, welchen die das Zweieck begrenzenden grössten Kugelkreise bilden,

$$\widehat{iPy} = \pi - \varphi,$$

und da dieser sich zum ganzen Winkel 2π, wie ω zum Flächeninhalt 4π der ganzen Kugel verhält, so ist der Flächeninhalt des Zweiecks

$$\omega = 2(\pi - \varphi);$$

folglich ist das Potential in P, abgesehen von einer Konstanten:

$$V = 2i(\pi - \varphi). \tag{3}$$

Die allgemeine Beziehung $\mathfrak{K}_s = -\frac{dV}{ds}$ gestattet uns, aus der Formel (3) den Wert und die Richtung der Kraft im Punkte P leicht zu ermitteln.

Das Potential V, als Funktion der einzigen Veränderlichen φ, ist für alle Punkte der Ebene Pi konstant, und folglich ist die Komponente $\mathfrak{K}_s$ in einer beliebigen in dieser Ebene liegenden Richtung gleich Null; die Kraft $\mathfrak{K}$ ist daher senkrecht zur Ebene iP. Wir finden somit eine Eigenschaft wieder, von der wir bei unserem Studium ausgegangen sind, und welche uns durch die Erfahrung bewiesen wird. Die Richtung von $\mathfrak{K}$ ist diejenige, nach welcher V ab- und φ zunimmt, diejenige nämlich, die von den Regeln von Ampère und Maxwell angegeben wird.

Um den Wert der Kraft zu berechnen, erteilen wir dem Punkte eine Verschiebung ds von P nach P' in der Richtung $P\mathfrak{K}$; $d\varphi$ und dV seien die entsprechenden Änderungen von φ und V. Man hat

$$ds = r\,d\varphi, \qquad dV = -2i\,d\varphi,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{K} = -\frac{dV}{ds} = \frac{2i\,d\varphi}{r\,d\varphi}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{2i}{r}. \tag{3'}$$

Die Intensität des von einem geradlinigen Strome hervorgerufenen Feldes ist der Stromstärke direkt, dem Abstande des betrachteten Punktes vom Strome umgekehrt proportional.

Im Felde eines geradlinigen Stromes sind also die Kraftlinien Kreise, die auf dem Leiter ihre Mittelpunkte haben und in Ebenen liegen, die zu demselben senkrecht sind; die Kraft hat längs jedes Kreises konstanten Wert.

Dieses von uns als eine Folge des Prinzips der Äquivalenz ermittelte Gesetz wurde auf experimentellem Wege von Biot und Savart bestimmt und ist sogar eines der Gesetze, welche die Erfahrung mit der grössten Strenge als richtig nachweist. Es bestätigt das Prinzip, von welchem wir ausgegangen sind, und diente eben Ampère als Ausgangspunkt zur Festsetzung seiner Theorie des Elektromagnetismus und zur Ableitung des Prinzips der Äquivalenz.

Ohne uns mit der vollständigen, experimentellen Kontrole dieses Gesetzes zu beschäftigen, wollen wir doch einen einfachen Versuch erwähnen, welcher beweist, dass die Kraft mit der Entfernung umgekehrt proportional variiert.

Ein geradliniger, sehr langer und vertikal angeordneter Leiter ii (Fig. 108) trägt durch Fäden eine leichte, um die Achse ii frei drehbare Scheibe AB. Man lege auf die Scheibe einen Magneten NS in die Richtung des erdmagnetischen Feldes, sodass die Richtwirkung des letzteren die Aufhängefäden nicht dreht, und balanziere die Scheibe durch ein Gegengewicht G aus. Wenn man nun einen Strom durch den Leiter ii schickt, so nimmt man keine Bewegung wahr. Dies beweist, dass die Summe der Momente in bezug auf die Achse ii der auf den Magneten wirkenden Kräfte Null ist; sind m und $-m$ die entgegengesetzt gleichen magnetischen Massen, die in den beiden Polen konzentriert sind, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ die Feldstärke in denselben, r und r' ihre Entfernungen von der Achse ii, so hat man:

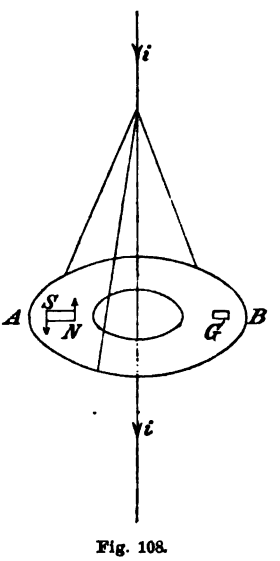

Fig. 108.

$$m\mathfrak{H}r - m\mathfrak{H}'r' = 0$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'} = \frac{r'}{r},$$

was zu beweisen war.

97. Zylindrisches, geradliniges Solenoid. — Betrachten wir ein zylindrisches Solenoid mit geradliniger Achse, welches praktisch durch

eine zylindrische Spirale mit sehr kleiner Ganghöhe hergestellt werden kann, deren Windungen gleichmässig auf der Zylinderoberfläche verteilt sind. Es sei $ABCD$ (Fig. 109) die Projektion des Zylinders, XX die Achse des Solenoids, n die Zahl der auf die Längeneinheit in der Richtung der Achse kommenden Windungen. Jede Windung ist einem magnetischen Blatte mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$ äquivalent, welches von der Windung begrenzt ist, und welches wir uns eben, mit der Dicke $\lambda = \frac{1}{n}$ vorstellen können, derart, dass jedes Blatt das benachbarte in allen Punkten berührt.

Die Magnetisierung hat in jedem Punkte den konstanten Wert

$$J = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} = ni \tag{4}$$

und ist parallel zur Achse XX. Die Gesamtheit dieser Blätter, welcher das Solenoid äquivalent ist, bildet einen zylindrischen, gleichförmigen Magneten $ABCD$, und die Massen von freiem Magnetismus reduzieren sich auf zwei entgegengesetzt gleiche, auf den Endseiten AB und CD verteilte Massen von der Dichte $\sigma = J$.

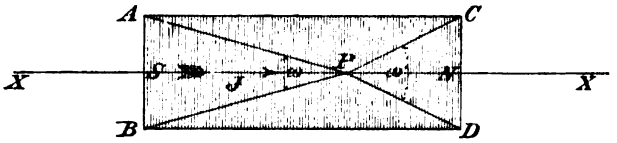

Fig. 109.

Berechnen wir das magnetische Moment dieses Systemes. Wenn a den Querschnitt und l die Länge des Zylinders bezeichnet, so ist die Menge von Magnetismus, die auf jeder der Grundflächen verteilt ist:

$$m = \sigma a = ani,$$

und daher das magnetische Moment:

$$\mathfrak{M} = lani,$$

oder ferner, wenn N die Gesamtzahl nl der Windungen bedeutet:

$$\mathfrak{M} = Nai.$$

Dem Produkte Na, welches die Summe der Flächen sämtlicher Windungen darstellt, giebt man den Namen *Gesamtflächeninhalt der Spirale* oder *des Solenoids;* bezeichnet man denselben mit S, so hat man zum Schlusse:

$$\mathfrak{M} = Si. \tag{5}$$

Das magnetische Moment des einem Solenoid äquivalenten Magneten ist gleich dem Produkte aus der Stromstärke und dem Gesamtflächeninhalte des Solenoids.

Dadurch, dass wir uns des äquivalenten, gleichförmigen Magneten bedienen, ist es uns leicht, das vom Solenoid erzeugte Feld zu untersuchen.

Für einen äusseren Punkt ist die vom Solenoid erzeugte Kraft der vom gleichförmigen Magneten herrührenden gleich. Dieselbe kann mittels der Coulomb'schen Formel ausgerechnet werden, indem man beachtet, dass die Massen von freiem Magnetismus sich auf die beiden auf den Grundflächen AB und CD verteilten Massen reduzieren, oder auch einfacher durch das eben ermittelte magnetische Moment.

Für einen inneren Punkt hat man dagegen Gleichheit zwischen der vom Strome erzeugten Kraft und der vom Magneten herrührenden Induktion.

Betrachten wir einen im Innern des Magneten und, der Einfachheit halber, auf der Achse XX gelegenen Punkt P, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$ die Stärke des vom Strome herrührenden Feldes, mit $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ die Werte der Kraft bezw. der Induktion, die vom Magneten herrühren.

Weil der betrachtete Punkt auf der Achse liegt, sind $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{H}_m$ und J der Symmetrie wegen parallel zur Achse XX, und es besteht die Beziehung:

$$\mathfrak{B}_m = \mathfrak{H}_m + 4\pi J.$$

Die Kraft $\mathfrak{H}_m$, welche von den beiden auf den Grundflächen gleichförmig mit der Dichte $\sigma = J$ verteilten Massen hervorgebracht wird, hat den Wert [79]:

$$\mathfrak{H}_m = J(\omega + \omega'),$$

wobei ω und ω' die scheinbaren Flächen der beiden Seiten, vom Punkte P aus gesehen, sind. Ferner ist die Kraft $\mathfrak{H}_m$ der Magnetisierung J entgegengerichtet und muss also als negativ angesehen werden; man hat also:

$$\mathfrak{B}_m = 4\pi J - J(\omega + \omega') = ni(4\pi - \omega - \omega')$$

und nach dem Prinzip der Äquivalenz:

$$\mathfrak{H} = ni(4\pi - \omega - \omega'). \tag{6}$$

Die Kraft $\mathfrak{H}$, welche immer positiv ist, weil $4\pi > \omega + \omega'$ ist, variiert von Punkt zu Punkt; in den einer der Grundflächen nahe gelegenen Punkten können ω und ω' ihren grössten Wert 2π erreichen; in den weit von den Grundflächen entfernten Punkten haben ω und ω' sehr kleine Werte. Betrachtet man einen Zylinder, dessen Länge im Vergleich zu dem Durchmesser seiner Basis sehr gross ist, und wählt man den Punkt P etwa in der Mitte der Achse, dann kann man ω und ω' vernachlässigen und näherungsweise annehmen:

$$\mathfrak{H} = 4\pi ni. \tag{7}$$

Wenn ω und ω' vernachlässigt werden können, dann wird die Kraft $\mathscr{H}$ auch für nicht auf der Achse liegende Punkte noch durch die Formel (7) gegeben; daher kann man im Innern eines sehr langen Solenoids in dem von den Enden weit genug entfernten Teile das Vorhandensein eines gleichförmigen Feldes annehmen. Betrachtet man dagegen das Feld in der Nähe der Enden, so variiert die Feldstärke nicht nur von Punkt zu Punkt eines und desselben Schnittes, sondern auch für verschiedene Punkte der Achse. Für einen unendlich nahe einem Ende auf der Achse gelegenen Punkt ist $\omega = 2\pi$ und $\omega' = 0$, folglich $\mathscr{H} = 2\pi ni$; die Kraft hat in der Nähe der Enden des Solenoids die Hälfte des Wertes, den sie in der Mitte besitzt.

Wenn man, anstatt eines geradlinigen, ein Solenoid mit kreisförmiger Achse betrachtet, hat der äquivalente Magnet eine Form, die man sich dadurch hergestellt denken kann, dass man einen gleichförmigen Magneten gebogen und dessen Grundflächen miteinander verbunden hat: da so die Verteilung von freiem Magnetismus auf den Grundflächen nicht mehr vorhanden ist, verlaufen alle Kraftlinien im Innern des Solenoids und fallen mit den Induktionslinien des Magneten zusammen; die Kraft hat in jedem Punkte den konstanten Wert:

$$\mathscr{H} = 4\pi J = 4\pi ni.$$

Bei der Anwendung des Prinzips der Äquivalenz kann man, anstatt der Gleichheit zwischen der vom Strome herrührenden Kraft und der vom äquivalenten Magneten erzeugten Induktion, die Gleichheit zwischen Kraft und Kraft in beiden Feldern betrachten; es ist dazu nötig, den Magneten so anzuordnen, dass der betrachtete Punkt ausserhalb desselben liegt. Im Falle des Solenoids z. B. kann man die Lamellen um einen äusserst geringen Betrag verschieben, sodass der Punkt P sich in der Luft befindet. Dann liegt derselbe in einem unendlich dünnen, im Magneten hergestellten Schlitz, und die auf ihn wirkende Kraft ist eben das, was wir elektromagnetisch definierte Kraft genannt haben, oder, wenn man nur die numerischen Werte ins Auge fasst, die magnetische Induktion. Die beiden Arten, die Sache zu betrachten, sind daher vollständig übereinstimmend.

Begnügen wir uns vorläufig mit der Erkenntnis, dass ein Solenoid uns ein leichtes Mittel an die Hand giebt, in einem gegebenen Raume ein praktisch gleichförmiges Feld zu erzielen, welches bekannte Werte besitzt, wenn die Werte, welche die Stromstärke i annimmt, bekannt sind. Das von einem Solenoid erzeugte Feld kann also bei der Betrachtung der zur Bestimmung der magnetischen Eigenschaften des Eisens und der ihm verwandten Körper [84] angestellten Versuche mit Nutzen

herangezogen werden. Wir müssen jedoch in dieser Hinsicht eine wichtige Bemerkung machen.

Ein in das Innere des Solenoids gesetzter Eisenkern magnetisiert sich durch Influenz des vom Strome erzeugten Feldes, und es treten auf ihm Massen von freiem Magnetismus zu Tage, welche ihrerseits magnetische Kräfte hervorrufen. Die Kraft in einem beliebigen im Innern des Solenoids gelegenen Punkte ist daher nicht mehr allein die vom Solenoid herrührende Kraft $\mathscr{H}$, sondern die Resultierende aus der Kraft $\mathscr{H}$ und aus der von den Massen des freien Magnetismus auf dem Eisenkern erzeugten Kraft. Letztere ist immer eine entmagnetisierende [87] Kraft, der Kraft $\mathscr{H}$ entgegengerichtet; ihr Wert ist um so grösser, je grösser der Durchmesser im Vergleich zu der Länge des Zylinders ist; sie kann jedoch nicht genau berechnet werden, wenn die Dichte des freien Magnetismus, d. h. die Intensität der Magnetisierung nicht bekannt ist; sie ist also unbestimmbar, wenn man die Eigenschaften des hineingebrachten Eisenkernes nicht kennt.

Praktisch beugt man diesem Übelstand vor, indem man diese Kraft zu Null oder so klein macht, dass man sie ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Ewing verwendet dafür kleine Stäbchen, deren Länge 300 bis 400mal so gross wie ihr Durchmesser ist, Hopkinson und Andere wählen ringförmig gebogene Stäbe oder allgemein geschlossene magnetische Kreise, in welchen keine Massen von freiem Magnetismus vorhanden sind.

Durch diese Anordnungen gewinnt man ein Feld, das man noch als gleichförmig ansehen kann, und dessen Stärke

ist. $$\mathscr{H} = 4\pi ni$$

98. Verteilung des magnetischen Potentials. — In den von Strömen hervorgerufenen Feldern ist das magnetische Potential eine polydrome Funktion, und keine monodrome, wie bei Feldern, die einfach von magnetischen Newton'schen Massen herrühren.

Betrachten wir einen Strom i in einem Kreise AB (Fig. 110), den wir der Einfachheit halber als in einer Ebene liegend voraussetzen, und das äquivalente, ebene magnetische Blatt. P sei ein Punkt im Innern des Blattes, P' und P'' zwei in unmittelbarer Nähe des Blattes je an einer Seite desselben ausserhalb gelegene Punkte.

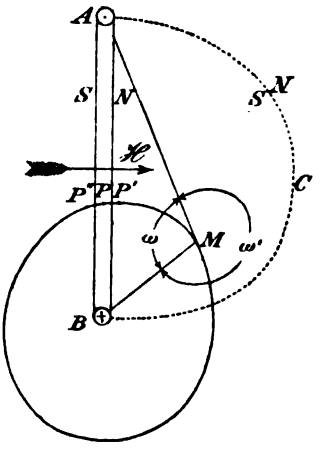

Fig. 110.

Ausserhalb des Blattes ist die Beschaffenheit des vom Blatte und des vom Strome herrührenden Feldes gleich. Daher hat das Potential in beiden Fällen, abgesehen von einer Konstanten in dem unendlich nahe der Nordseite gelegenen Punkte P', den Wert

$$V' = 2\pi \mathfrak{P} = 2\pi i$$

und in dem unendlich nahe an der Südseite gelegenen Punkte P'' den Wert

$$V'' = -2\pi \mathfrak{P} = -2\pi i.$$

Verschiebt man die magnetische Einheitsmasse vom Punkte P' zum Punkte P'' längs einer durch das Blatt nicht hindurchgehenden Linie $P'MP''$, so leisten die Feldkräfte eine positive Arbeit

$$V' - V'' = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

Wenn man nun aber andererseits die Masse *Eins* längs eines unendlich dünnen, im Blatte selbst hergestellten Kanals von P'' nach P' zurückkehren lässt, so leisten die Feldkräfte, weil die Kraft im Inneren der Bewegung entgegengerichtet ist, eine negative Arbeit, d. h. äussere Kräfte müssen die Arbeit verrichten, und folglich steigt das Potential von P'' nach P'. Die Kraft im Innern des Blattes hat den konstanten Wert

$$4\pi J = 4\pi \frac{i}{\lambda};$$

der Abstand zwischen den Punkten P'' und P' ist λ, folglich ist die Arbeit, während die Einheitsmasse durch den Kanal von P'' nach P' übergeht, auch

$$4\pi \frac{i}{\lambda} \lambda = 4\pi i.$$

Nach dem Durchlaufen der Kreisbahn und der Rückkehr nach P' hat man ein Potential

$$V_1' = V'' + 4\pi i = -2\pi i + 4\pi i = 2\pi i = V',$$

welches gleich dem ursprünglichen ist.

In dem vom Blatte erzeugten Felde ist also das Potential eine monodrome Funktion; die Arbeit längs einer beliebigen geschlossenen Linie ist gleich Null, wie es auch notwendigerweise sein muss, weil das Feld durch statische Zustände bedingt ist.

In dem von einem Strome erzeugten Felde dagegen wird bei dem Übergang von P'' zu P' eine unendlich kleine Arbeit verrichtet, da die Kraft endliche Werte, welche stetig zwischen diesen Punkten variieren, besitzt und auf einen unendlich kleinen Raum wirkt. Deshalb findet man, nachdem man die geschlossene Linie durchlaufen hat, bei der Ankunft in P' einen Wert des Potentials, welcher von dem, den man in P'' hatte, nicht verschieden ist, nämlich:

$$V_1' = V'' = -2\pi i.$$

In dem vom Strome erzeugten Felde wird also, während die bewegliche Einheitsmasse eine geschlossene, die Stromfläche durchschneidende Linie durchläuft, eine positive Arbeit

$$V' - V_1' = 4\pi i$$

geleistet.

Dies ist in diesem Felde möglich, weil die Arbeit auf Kosten der vom Strome gelieferten Energie verrichtet wird. Kehrt man von P' längs einer mit der Strombahn verschlungenen Linie nach P' zurück, so sinkt der Wert des Potentials um $4\pi i$ nach jeder Umkreisung; das Potential in P' kann beliebig viele Werte annehmen, welche von einander um $4\pi i$ differieren.

In einem beliebigen Punkte M, von welchem aus die Nordseite von AB unter dem räumlichen Winkel ω gesehen wird, hat das vom Blatte hervorgebrachte Potential den Wert

$$v = \omega i + \text{Konst};$$

dagegen kann das vom Strome hervorgerufene Potential unendlich viele Werte annehmen, die man in den allgemeinen Ausdruck zusammenfassen kann:

$$V = \omega i \mp 4\pi N i + \text{Konst}, \tag{8}$$

worin N angiebt, wie oft der Punkt beim Durchlaufen der Linie den Stromkreis umkreist; man hat dabei das Vorzeichen + oder — zu wählen, je nachdem die Linie in der Richtung der Kraft oder in der entgegengesetzten durchlaufen wird, d. h. je nachdem die geleistete Arbeit positiv oder negativ ist.

Zu demselben Ausdrucke können wir auch durch eine etwas andere Überlegung gelangen.

Wir stellen uns vor, dass wir, vom Punkte M ausgehend, in dem das Potential den Wert $\omega i +$ Konst. besitzt, eine geschlossene, mit dem Strome verschlungene Linie durchlaufen; da die Form und die Lage des Blattes willkürlich sind, werden wir immer bewirken können, dass das Blatt bei dieser Bewegung nicht durchsetzt wird; es genügt, anzunehmen, dass sich das Blatt, wenn wir in die Nähe von P'' gelangt sind, deformiert, als wäre es von dem beweglichen Punkte vorwärts geschoben. Dadurch wird das Blatt, wenn man nach M zurückgekehrt ist, eine Lage eingenommen haben, die durch die Punkte ACB bestimmt ist. Jetzt sieht man vom Punkte M aus nicht mehr die Nordseite, sondern die Südseite unter dem Winkel $\omega' = 4\pi - \omega$, und folglich hat das Potential nicht mehr den Wert $\omega i +$ Konst, sondern einen neuen Wert:

$$-(4\pi - \omega) i + \text{Konst} = (\omega - 4\pi) i + \text{Konst},$$

was wir beweisen wollten.

Das von einem Strome hervorgerufene Feld ist ein *zyklischer Raum*, d. h. ein Feld, in welchem das Potential eine polydrome Funktion ist: die Konstante $4\pi i$ heisst die *zyklische Konstante*. Betrachtet man geschlossene, mit dem Strome nicht verschlungene Linien, so ist die längs einer derselben verrichtete Arbeit gleich Null; man kann also den Raum *azyklisch* machen, indem man eine beliebige mit der Begrenzung AB versehene Fläche festlegt und die Bedingung stellt, dass dieselbe nie durchsetzt werden dürfe; nur dann hat man es in diesem Falle mit einem monodromen Potential zu thun.

99. Verteilung des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes. — In dem Falle einer geradlinigen Strombahn können die bezüglich der Verteilung der Potentiale bewiesenen Eigentümlichkeiten direkt aus dem Gesetze von Biot und Savart abgeleitet werden.

A sei ein beliebiger, im Felde des Stromes i gelegener Punkt; da die Kraft $\mathfrak{H} = \frac{2i}{r}$ senkrecht zur Ebene Ai ist, so ist die Arbeit, wie man auch immer eine magnetische Masse in dieser Ebene bewegt, gleich Null. Wenn man dagegen von der Ebene Ai zu einer anderen mit der ersten einen Winkel α bildenden Ebene Bi längs des Kreisbogens vom Radius $Ai = r$ übergeht, so ist die geleistete Arbeit:

$$W = \frac{2i}{r}\alpha r = 2\alpha i.$$

Diese Arbeit ist unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Strombahn und hängt ausschliesslich vom Winkel α ab.

Man nehme nun an, die Masse *Eins* gehe vom Punkte A längs einer beliebigen, ebenen oder krummen Linie zum Punkte B über (Fig. 111),

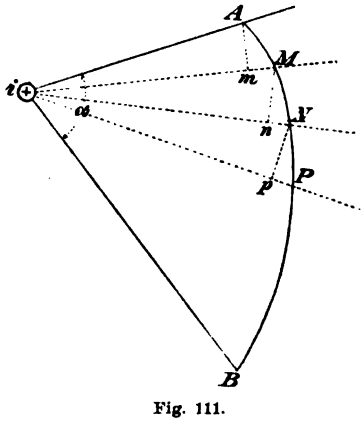

Fig. 111.

und lege durch den Leiter i eine Schar von Ebenen, welche die Linie in Punkten schneiden, deren Projektionen auf die Figurebene mit $M, N, P, \cdots$ bezeichnet werden. In einer zum Leiter i senkrechten Ebene schlage man einen Kreisbogen mit dem Radius iA, dessen Zentrum sich im Leiter i befinde; die Projektion des Schnittpunktes, in welchem dieser Kreisbogen die Ebene iM trifft, auf die Normalebene zu i heisse m; in analoger Weise schlage man einen Kreisbogen um den Leiter i mit dem Radius iM; die Projektion des Schnittpunktes, in welchem dieser Kreisbogen die Ebene iM trifft, auf die Normalebene heisse n; dasselbe führe man in analoger

Weise für alle weiteren Punkte der Linie AB aus. Man verbinde M mit m, N mit $n \cdots$ durch beliebige in den Ebenen iM, iN, $\cdots$ liegende Linien, deren Projektionen in der Figurenebene die Strecken Mm, Nn, $\cdots$ sind.

Denkt man sich, dass die Anzahl der durch i gelegten Ebenen unendlich wächst, so hat man eine Polygonallinie mit unendlich kleinen Seiten, deren Grenzwert die gegebene Linie AB ist. Die von den Kräften des Feldes darauf verwendete Arbeit, die magnetische Einheitsmasse längs der Linie AB fortzubewegen, ist der Grenzwert, nach welchem die von denselben Kräften zur Bewegung der Masse längs der Polygonallinie verrichtete Arbeit strebt. Nun sind alle längs der Strecken mM, nN, $\cdots$ geleistete Arbeiten Null, und die Arbeit beschränkt sich auf die Summe der den Kreisbögen Am, Mn, $\cdots$ entsprechenden Arbeiten. Längs eines beliebigen dieser Kreisbögen, welcher einem Winkel $d\alpha$ entspricht, ist die Arbeit $2id\alpha$, und folglich ist die gesamte Arbeit:

$$2i\alpha,$$

worin α der von den beiden Ebenen iA und iB gebildete Flächenwinkel ist.

Die geleistete Arbeit ist unabhängig von der durchlaufenen Linie, sie hängt nur von dem Winkel α ab, welcher von den durch i und die Endpunkte der Linie gelegten Ebenen gebildet wird. In diesem Felde besitzen also die Kräfte ein Potential, welches aber nicht monodrom ist, weil der Winkel α und folglich die geleistete Arbeit unendlich viele Werte haben kann, je nach der Zahl der Umwindungen der betrachteten Linie um die Strombahn i. Die verschiedenen Werte von α differieren von einander um 2π, und folglich diejenigen der Arbeit und des Potentials um $4\pi i$. Man muss infolgedessen in dem allgemeinen Ausdrucke (3) des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes

$$V = 2i(\pi - \varphi)$$

unter φ einen beliebigen der Winkel verstehen, die man erhält, wenn man ein ganzes Vielfaches von 2π zu φ addiert oder von φ subtrahiert.

100. Allgemeine Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung und dem erzeugten magnetischen Felde. — Die im vorigen Abschnitte erhaltenen Ergebnisse können in eine etwas andere Form gebracht werden.

Im Felde des Stromes betrachte man eine beliebige geschlossene Linie l; bezeichnet dl ein Linienelement und $\mathfrak{H}_l$ die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft, dann ist $\mathfrak{H}_l dl$ die Arbeit für die Verschiebung der Einheitsmasse längs dieses Elementes, und folglich $\int \mathfrak{H}_l dl$ die Arbeit längs der ganzen Linie. Wenn die betrachtete Linie

mit dem Strome einfach verschlungen ist und Nmal durchlaufen wird, so ist die verrichtete Arbeit $4\pi Ni$, und daher hat man:

$$\int \mathfrak{H}_l dl = 4\pi Ni.$$

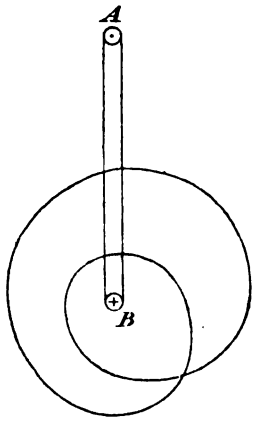

Fig. 112.

Derselbe Ausdruck der Arbeit wird erhalten, wenn man die Einheitsmasse ein einziges mal um eine geschlossene, mit dem Strome Nmal verschlungene Linie herumführt (Fig. 112), und also auch, wenn die Einheitsmasse einmal um eine geschlossene Linie herumgeht, welche eine aus N Windungen bestehende Stromspirale durchsetzt, weil die Arbeit unabhängig von der Form der Linie und der Strombahn ist und ausschliesslich davon abhängt, wie viel mal die Linie die Strombahn umschlingt.

Diese Beziehung kann ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden, in welchem das Feld von einem System von Strömen hervorgebracht wird; die gesamte Arbeit ist die Summe der von den einzelnen Strömen herrührenden Arbeiten, und folglich:

$$\int \mathfrak{H}_l dl = 4\pi \sum Ni. \tag{9}$$

In jedem Posten der Summe giebt N an, wie vielfach die Linie und der Strom verschlungen sind, weil es, wie gesagt, ganz gleichgiltig ist, ob die Linie die Stromfläche Nmal durchschneidet, oder ob der Stromkreis die von der Linie eingeschlossene Fläche Nmal durchsetzt; man wird ferner N mit positivem oder negativem Vorzeichen annehmen, je nachdem die Einheitsmasse längs der Linie sich um den Stromkreis in der Richtung des von diesem erzeugten Feldes oder in der entgegengesetzten bewegt.

In einem Gleichstromkreise findet eine konstante elektrische Verschiebung statt, die Stromstärke ist der genaue Ausdruck für die Änderung der Verschiebung in der Zeiteinheit. Indessen stellt die Summe $\sum Ni$ die gesamte elektrische Verschiebung dar, die in der Zeiteinheit in der geschlossenen, betrachteten Linie stattfindet; die Formel (9) giebt die Beziehung dieser Verschiebung zu dem Linienintegral der von der Verschiebung selbst erzeugten magnetischen Kraft und bildet folglich die allgemeine Lösung des ersten Problems, das wir uns auf dem Gebiete des Elektromagnetismus vorgelegt haben.

101. Einfluss der freien magnetischen Massen und der Beschaffenheit der Materialien des Feldes. — Bei den im vorigen Abschnitte entwickelten

Betrachtungen ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Linie l in der Luft gezogen wäre, und dass in dem vom Strome hervorgebrachten Felde keine freien magnetischen Massen vorhanden wären. Behandeln wir nun den allgemeinen Fall: im Felde des Stromes befinden sich freie magnetische Massen, welche entweder auf Eisenstücken, die durch die induktive Wirkung des Stromes magnetisiert worden sind, oder auf ursprünglichen Magneten verteilt sind; die Linie l liege beliebig in dem von Luft oder von magnetischem Material eingenommenen Raume.

In jedem Punkte des Feldes ist die Kraft $\mathfrak{H}$ die Resultierende aus der vom Strome hervorgebrachten Kraft $\mathfrak{H}'$, die, wie vorher angegeben, berechnet wird, und der von den Massen von freiem Magnetismus herrührenden Kraft $\mathfrak{H}''$, welche durch die Coulomb'sche Formel, wenn die Verteilung der Massen bekannt ist, berechnet werden kann. Man hat in jedem Punkte der Linie $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_i' + \mathfrak{H}_i''$, folglich ist die geleistete Arbeit, während die Einheitsmasse die Linie durchläuft:

$$\int \mathfrak{H}_i dl = \int \mathfrak{H}_i' dl + \int \mathfrak{H}_i'' dl.$$

Nun ist nach der Formel (9):

$$\int \mathfrak{H}_i' dl = 4\pi \sum Ni$$

und ferner, welche Gestalt die Linie l auch besitze:

$$\int \mathfrak{H}_i'' dl = 0,$$

weil das längs einer geschlossenen Linie gebildete Integral einer Kraft, welche von Newton'schen, immer ein monodromes Potential besitzenden Massen herrührt, stets gleich Null ist.

Es besteht folglich noch die Beziehung:

$$\int \mathfrak{H}_i dl = 4\pi \sum Ni.$$

Das Integral der magnetischen Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Linie hängt ausschliesslich von der Stärke der Ströme und davon ab, wie oft die Linie mit den Strombahnen verkettet ist, und ist ganz unabhängig von der Natur der durchdrungenen Materialien und von der Verteilung der freien magnetischen Massen im Felde.

Ist die geschlossene Linie mit keinem Stromkreise verkettet, so ist das Integral der Kraft längs derselben gleich Null, welches auch die Verteilung des Feldes sei; und umgekehrt, ist das Integral der magnetischen Kraft längs einer geschlossenen Linie nicht gleich Null, dann durchsetzt diese Linie sicher irgend eine Stromfläche. Diese Eigenschaft könnte sogar zur Definition des Stromes dienen: durch einen gegebenen Stromkreis fliesst ein Strom, wenn das Integral der magnetischen Kraft längs einer beliebigen mit ihm verketteten Linie nicht Null ist. Auf diese

Weise wäre der Strom durch seine magnetischen Wirkungen, auf welchen viele der praktischen Messmethoden beruhen, definiert.

Es ist wichtig, schon jetzt zu bemerken, dass der elektrische Strom eine Erscheinung ist, welche ihren Sitz nicht nur im Innern eines Leiters hat, sondern sich auf den ganzen umgebenden Raum erstreckt; dieser befindet sich in besonderen Zuständen und ist der Sitz eines magnetischen Feldes, in welchem das Integral der Kraft längs einer geschlossenen Linie nicht Null ist.

Daraus, dass eine beliebige Veränderung der Körper, welche sich in dem von einem Strome erzeugten Felde befinden, keine Veränderung des Integrals der Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Linie zur Folge hat, darf man jedoch nicht schliessen, dass das ganze Feld unverändert bleibt.

Vor allem variiert das Integral der magnetischen Induktion mit der Natur der durchsetzten Medien. In der That, wenn μ den Wert der magnetischen Permeabilität in einem beliebigen Punkte der Linie bezeichnet, entsprechend dem Zustande, in welchem sich jenes Material befindet, so gilt für jeden Punkt die Bezeichnung: $\mathfrak{B}_l = \mu \mathfrak{H}_l$, und durch Einsetzung dieses Wertes in die Formel (9) erhält man:

$$\int \frac{\mathfrak{B}_l}{\mu} dl = 4\pi \sum Ni.$$

Verläuft die Linie ganz in demselben Material, dann hat μ längs der ganzen Linie konstanten Wert, und es wird:

$$\int \mathfrak{B}_l dl = 4\pi\mu \sum Ni.$$

Das Integral der magnetischen Induktion längs einer beliebigen geschlossenen Linie hängt von der Permeabilität der durchsetzten Medien ab und ist proportional derselben, wenn ein einziges Medium durchsetzt wird.

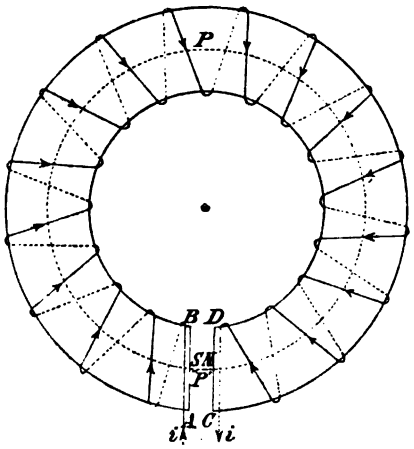

Fig. 113.

Auch die Kraft und das Integral der Kraft längs einer offenen Linie variieren mit der Natur der Substanz. Man denke sich einen magnetischen Kreis, der grösstenteils aus Eisen und etwas Luft besteht. Es sei z. B. (Fig. 113) auf einen Eisenring, aus welchem die magnetische Substanz zwischen zwei einander nahen Schnitten AB und CD entfernt worden ist, eine gleichförmige, vom Strome durch-

flossene Spirale gewickelt. Dieser magnetische Kreis bildet eine Induktionsröhre, längs welcher der Induktionsfluss konstant ist; die Induktionslinien sind Kreise, welche ihr Zentrum auf der Achse des Ringes haben.

Man betrachte eine beliebige dieser Induktionslinien und unterscheide die beiden Teile, den Teil SPN im Eisen und den Teil $NP'S$ in der Luft. Für das Eisen hat man $\mathscr{H} = \frac{\mathscr{B}}{\mu}$ und für die Luft $\mathscr{H} = \mathscr{B}$, folglich ist das Integral der Kraft längs dieser Linie:

$$\int \mathscr{H}_l dl = \frac{1}{\mu} \int_{SPN} \mathscr{B} dl + \int_{NP'S} \mathscr{B} dl = 4\pi N i.$$

Setzt man die Induktion $\mathscr{B}$ konstant voraus, und bezeichnet man mit l die Länge des Linienstückes SPN im Eisen, mit d diejenige des Stückes $NP'S$ in der Luft, so hat man:

$$\frac{\mathscr{B}}{\mu} l + \mathscr{B} d = 4\pi N i,$$

woraus folgt:

$$\mathscr{B} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d},$$

und, da in der Luft $\mathscr{H}$ und $\mathscr{B}$ denselben Wert besitzen:

$$\mathscr{H} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Diese Beziehungen beweisen, dass die Werte der Kraft $\mathscr{H}$ und deren Integral längs einer nicht geschlossenen Linie von der Permeabilität des Mediums abhängen. Es ist zwar das Integral der Kraft längs einer geschlossenen Linie konstant, aber die Verteilung dieser Kraft längs der Linie variiert mit der Natur der Materialien.

Wenn der Ring aus einem einzigen Material bestände, so hätte die Kraft längs der Linie konstanten Wert; da der Ring dagegen aus verschiedenen Materialien gebildet ist, so ist die Kraft kleiner in dem Medium, welches grössere Permeabilität besitzt, und grösser in der Luft. Wenn man μ sehr gross und d sehr klein macht, so kann die Kraft $\mathscr{H}$ in der Luft sehr grosse Werte erreichen.

Man bezeichne mit Φ, $\mathscr{B}$ und S bezw. den Wert des Flusses, der Induktion und des Querschnittes in dem eben betrachteten Eisenring, Werte, die man als konstant annehmen kann. Es ist dann:

$$\Phi = \mathscr{B} S = S \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Der Wert des Flusses hängt nicht nur von der Stärke des magnetisierenden Stromes und davon, wie oft der Stromkreis mit dem magnetischen Kreise verschlungen ist, sondern auch von der Permeabilität der Materialien ab.

Man macht in der Praxis von Anordnungen dieser Art Gebrauch, um in der Luft erhebliche Werte des Flusses und der magnetischen Kraft zu erreichen. Man verwendet dafür derartige Kreise, die fast vollständig aus magnetischem Material, auf welches die induzierenden Windungen gewickelt sind, und aus möglichst dünnen Luftzwischenräumen bestehen. Auf jeder der Endflächen des an einer Stelle unterbrochenen Ringes, an welchen die Induktionslinien im Eisen ein- oder austreten, tritt eine Verteilung von freiem Magnetismus zu Tage: diese Endseiten werden deshalb in der Technik *Polflächen* oder einfach *Pole* genannt.

102. Berechnung der magnetischen Kreise. Analogie mit dem Ohm'schen Gesetze und den Kirchhoff'schen Prinzipien. Man betrachte einen mit dem Strom i N-mal verketteten magnetischen Kreis, in welchem der Fluss konstant ist oder als konstant angenommen werden kann, sodass er eine wirkliche Induktionsröhre bildet. Es soll der Wert des Flusses berechnet werden, wenn die Form der Röhre und die Materialien, woraus dieselbe besteht, bekannt, d. h. wenn für jeden Schnitt dessen Flächeninhalt S und die Permeabilität μ gegeben sind.

Dafür ist es nicht erforderlich, den Wert der magnetischen Induktion in den einzelnen Punkten eines und desselben Schnittes zu betrachten; man kann vielmehr statt dessen in jedem Schnitte einen solchen Mittelwert $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{S}$ in Rechnung ziehen, welcher, wenn er in allen Punkten des Schnittes herrschte, einen Fluss hervorbringen würde, der dem wirklich vorhandenen gleichkommt. Für jeden Schnitt der Röhre können die Grössen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, μ und S als Funktionen des auf einer Induktionslinie von einem beliebigen Punkte aus gemessenen Abstandes l ausgedrückt werden. Unter diesen Grössen bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\Phi}{S}, \quad \mathfrak{H} = \frac{\Phi}{\mu S},$$

folglich giebt uns die auf eine beliebige Induktionslinie angewandte Formel (9):

$$\Phi \int \frac{dl}{\mu S} = 4\pi N i$$

oder ferner:

(10) $$\mathfrak{R}\Phi = 4\pi N i,$$

worin man

(11) $$\mathfrak{R} = \int \frac{dl}{\mu S}$$

gesetzt hat.

Wenn man die magnetische Verschiebung mit der elektrischen, die Grösse $4\pi Ni$ mit der E. M. K. und $\mathfrak{R}$ mit dem Widerstand r vergleicht, so findet man eine beachtenswerte Analogie obiger Beziehungen mit denjenigen, welche für einen vollständigen elektrischen Stromkreis das Ohm'sche Gesetz ausdrücken $\left(ri = e, \quad r = \int \frac{ds}{cS}\right)$. Die Grösse $4\pi Ni$ kann der Analogie wegen *magnetomotorische Kraft* genannt werden. Durch diese Benennung haben wir schon [81] eine Grösse von derselben Natur wie die magnetischen Kräfte bezeichnet; jetzt dagegen bezeichnen wir damit eine Grösse, welche, wie aus der Formel (9) ersichtlich, ein Linienintegral der magnetischen Kraft, d. h. eine Grösse von der Natur der Potentiale ist; genau so, wie man in der Lehre von der Elektrizität den Namen E. M. K. zwei Grössen erteilt, von denen eine eine wirkliche Kraft darstellt, während die andere die Natur der Potentiale besitzt.

Die Grösse $\mathfrak{R}$ wird *magnetischer Widerstand*, oder, wie es von O. Heaviside vorgeschlagen wurde, *Reluktanz des magnetischen Stromkreises* genannt. Die Formel (11), welche den Zusammenhang derselben mit der Länge und dem Querschnitte des magnetischen Kreises angiebt, ist vollständig analog derjenigen, welche die Beziehung zwischen Ohm'schem Widerstand und Länge und Querschnitt des elektrischen Stromkreises ausdrückt.

Man kann weiter $\varrho = \frac{1}{\mu}$ setzen, und in der Analogie fortfahrend, μ *magnetische Konduktivität* oder *Leitfähigkeit* und die reziproke Grösse ϱ *spezifischen magnetischen Widerstand* oder *Reluktivität* nennen.

In dem besonderen Falle eines magnetischen Kreises mit gleichmässigem Querschnitte und konstanter Reluktivität hat man $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} = \varrho \frac{l}{S}$; ähnlich wie bei einem elektrischen Stromkreise mit gleichmässigem Querschnitt und konstanter Resistivität d. h. konstantem spezifischem Ohm'schem Widerstand.

Wir haben oben den Fall eines mit dem Strome N-mal verketteten magnetischen Kreises betrachtet, in welchem die Induktion konstant ist. Praktisch ist es zwar fast unmöglich, Flüsse zu erhalten, die längs des ganzen Kreises konstant sind; es ist jedoch immer möglich, den magnetischen Kreis in Teile zu zerlegen, in welchen der Fluss als konstant angesehen werden kann, sodass:

$$\int \mathfrak{H}_i \varrho \, dl = \sum \mathfrak{R} \Phi.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung der Reluktanzen $\mathfrak{R}$ wird es zweckmässig sein, den Kreis in derartige Teile zu zerlegen, dass man in jedem derselben nicht nur Φ, sondern auch μ und S als konstant annehmen kann.

In dem allgemeinen Falle, in welchem der magnetische Kreis mit mehreren Strömen verschlungen ist, wird die Formel (9) in die folgende übergeführt:

$$\sum \mathfrak{R}\Phi = 4\pi \sum Ni; \tag{12}$$

diese Beziehung ist derjenigen analog, die das zweite Kirchhoff'sche Prinzip ausdrückt.

Auch das erste Prinzip von Kirchhoff findet sein Analogon bei den magnetischen Kreisen; da die magnetische Verschiebung solenoidisch ist, so besteht zwischen den Flüssen, die in einem Punkte zusammenkommen, die Beziehung:

$$\sum \Phi = 0, \tag{13}$$

bei deren Anwendung zu beachten ist, dass der magnetische Fluss nicht nur in den magnetischen Materialien (wie der elektrische Strom nur in den Leitern), sondern auch in der Luft und allgemein in einem beliebigen Medium existiert, weil es keine magnetisch isolierenden Körper giebt, in welchen $\mu = 0$ ist. Es gelten also für die magnetischen Stromkreise dieselben Beziehungen wie für die elektrischen, und die Berechnung wird in beiden Fällen in ganz analoger Weise ausgeführt werden können.

Die Analogie, die wir zwischen den beiden Klassen von Erscheinungen bemerkt haben, besteht nur in der Form der Gleichungen, hat aber nicht ihren Grund in der physikalischen Natur der Erscheinungen selbst. In einem elektrischen Stromkreise hängen die Grössen r und ϱ von der Beschaffenheit, der Form, den Abmessungen und den physikalischen Zuständen des Körpers, namentlich der Struktur und Temperatur ab, aber sie sind von den elektrischen Grössen e und i unabhängig, oder sie hängen, wenn wir wollen, von letzterer nur indirekt ab, insofern die Temperatur von der Stromstärke abhängig ist.

Die Grössen $\mathfrak{R}$, ϱ und μ dagegen sind für einen magnetischen Kreis keine Konstanten, sondern hängen unmittelbar von den Werten von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ ab, sie sind sogar keine durch Formeln ausdrückbaren Funktionen, weil sie nicht nur von den gegenwärtigen, sondern auch von den vorherigen Werten von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ abhängen. In dem elektrischen Stromkreise ist i der Grösse e proportional, während in dem magnetischen Φ keineswegs der Grösse $4\pi \sum ni$ proportional ist.

103. Strom in einem magnetischen Felde. Energie. Arbeit. — Das Prinzip der Äquivalenz gestattet uns, den Ausdruck für die Energie eines elektrischen Stromes in einem magnetischen Felde zu ermitteln.

In der That ist die Energie eines einfachen, im magnetischen Felde befindlichen magnetischen Blattes mit der Potenz $\mathfrak{P}$ (16) [76]:

$$W = \mathfrak{P}\Phi,$$

wobei Φ die Zahl der Kraftlinien bedeutet, die an der Nordseite des Blattes ankommen.

Nun ist ein elektrischer Stromkreis einem magnetischen Blatte mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$ äquivalent, und danach ist die Energie eines Stromes im magnetischen Felde durch

$$W = i\Phi$$

ausgedrückt, worin Φ der vom Felde herrührende Induktionsfluss ist, welcher die Stromfläche in entgegengesetzter Richtung als der vom Strome herrührende Fluss durchsetzt.

Bei dieser Behandlung ist es zweckmässig, als positive Richtung der Flüsse durch die Stromfläche diejenige des vom Strome hervorgebrachten Flusses anzunehmen; nach dieser Voraussetzung wird man Φ als einen negativen Fluss behandeln müssen, d. h., wenn man mit $\varphi = -\Phi$ den Fluss in der positiven Richtung bezeichnet, wird der Ausdruck der Energie eines Stromes in einem magnetischen Felde durch

$$W = -i\varphi \tag{14}$$

ausgedrückt.

Lässt man durch eine Verschiebung des Stromträgers i oder durch eine Variation des Feldes, welche von einer Veränderung der Massen oder der Ströme, die dasselbe erzeugen, hervorgebracht wird, den Wert des Flusses durch die Stromfläche von φ_1 zu φ_2 variieren, so leisten die Kräfte, die das Feld auf den Strom ausübt, eine Arbeit:

$$W = -i(\varphi_1 - \varphi_2) = i(\varphi_2 - \varphi_1),$$

welche eine positive oder negative, d. h. eine von den Kräften des Feldes, oder gegen diese von äusseren Kräften geleistete Arbeit ist, je nachdem φ_2 grösser oder kleiner als φ_1 ist, d. h. je nachdem die Energie des Systems erhöht oder vermindert wird.

Wenn dem System bewegliche Teile angehören, so bewegen sich diese unter der Wirkung der auf sie wirkenden Kräfte in der Weise, dass eine positive Arbeit geleistet, d. h. die Energie des Systems vermindert wird. Jene Lage, bei welcher der Fluss φ den höchsten Wert besitzt, ist eine Lage stabilen Gleichgewichtes.

Ist z. B. ein Kreisstrom in einem gleichförmigen magnetischen Felde um eine zur Richtung des Feldes senkrechte Achse frei drehbar, so wird

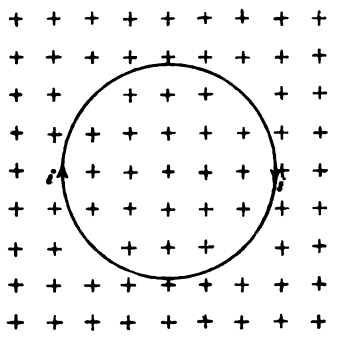

Fig. 114.

er rotieren, bis er sich in die zu den Kraftlinien senkrechte Ebene einstellt, sodass dieselben ihn in der positiven Richtung durchdringen, wie es in der Fig. 114 angedeutet ist, bei welcher man angenommen hat, dass die magnetischen Kraftlinien in bezug auf die Zeichnungsebene von vorn nach hinten verlaufen. Im erdmagnetischen Felde stellt sich ein um eine vertikale Achse frei drehbarer Stromkreis senkrecht zur magnetischen Meridianebene ein, sodass der magnetische Nordpol sich an der linken Seite des gegen das Innere des Stromkreises gewendeten Ampère'schen Beschauers befindet.

In den betrachteten Beispielen ist die um π gedrehte Lage des Stromkreises, welcher ein Minimum für φ entspricht, auch eine Gleichgewichtslage, aber eine Lage labilen Gleichgewichtes.

104. Deformierbare Stromkreise. Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf endliche oder unendlich kleine Teile von Strombahnen. — Die im vorigen Abschnitt enthaltenen Darlegungen erlauben uns, die Kraftwirkung auszurechnen, welche von einem magnetischen Felde auf einen bestimmten Teil der Strombahn ausgeübt wird. In einem festen, unveränderlichen, gleichförmigen magnetischen Felde betrachten wir eine

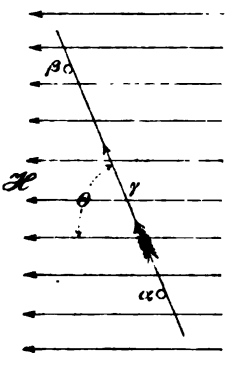

Fig. 115a.

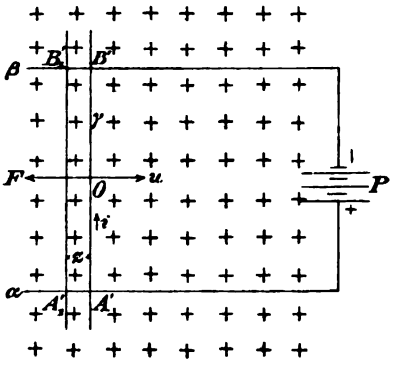

Fig. 115.

Strombahn, welche einen geradlinigen, beweglichen Teil besitzt, gebildet beispielsweise von zwei parallelen Leitern α und β, auf welchen ein geradliniges Leiterstück γ gleiten kann (Fig. 115); eine konstante Strom-

quelle P mit der E. M. K. e erhalte in diesem Stromkreis einen Strom von der konstanten Intensität i in der Richtung des Pfeiles. Grösserer Allgemeinheit wegen nehmen wir an, die Ebene des Stromkreises sei nicht senkrecht zum Felde, d. h. die magnetischen Kraftlinien, die senkrecht zur Figurebene von vorn nach hinten gerichtet sind, bilden einen Winkel θ mit der Richtung des beweglichen Leiters γ (wie aus der Figur 115a ersichtlich, welche einen zu den Leitern α und β senkrechten Schnitt darstellt).

Für eine gewisse Lage des Gleitstückes γ, welcher ein Fluss φ durch die Stromebene entspricht, besitzt die Energie des Systems den Wert:

$$W = -i\varphi.$$

Wird durch eine Bewegung des Leiters γ eine Änderung des Flusses hervorgebracht, dann wird Arbeit verrichtet; das Feld übt also auf den Leiter Kräfte aus, von welchen diese Arbeit herrührt.

Wenn das Stück γ, immer in Berührung mit den Leitern α und β bleibend, sich um den Mittelpunkt O des Teiles AB dreht, so variiert die Zahl der den Stromkreis durchsetzenden Kraftlinien nicht, folglich wird keine Arbeit verrichtet; die vom Felde auf das Gleitstück ausgeübten Kräfte besitzen eine im Punkte O angreifende Resultante F.

Eine Arbeitsleistung ist auch in dem Falle nicht vorhanden, dass der Leiter γ, die Berührung mit α und β beibehaltend, in seiner eigenen Richtung oder parallel zu den Kraftlinien gleitet; die Kraft F ist also senkrecht zur Ebene $i\mathfrak{H}$, welche von der Richtung des Stromes und derjenigen des Feldes gebildet wird.

Wenn man dagegen dem Leiter γ eine Verschiebung z erteilt, derart, dass er parallel zu sich selbst in der zur Ebene $i\mathfrak{H}$ senkrechten Richtung F von der Lage $A'B'$ zur Lage $A_1'B_1'$ übergeht, so wird dadurch der Fluss vom Werte φ_1 zum Werte φ_2 gesteigert; man findet eine positive Arbeit:

$$Fz = i(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Die Richtung der Kraft ist bereits vom Pfeile angedeutet; berechnen wir jetzt die Stärke derselben.

Die Änderung des Flusses wird durch das Produkt aus der Feldstärke und der Projektion $A'B'B_1'A_1'$ der erzeugten Fläche auf der zu $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene ausgedrückt, man hat nämlich, wenn l die zwischen den beiden Berührungspunkten A und B liegende Länge des Leiters γ bedeutet,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathfrak{H} z l \sin\theta.$$

Durch Einsetzung dieses Ausdruckes für $\varphi_2 - \varphi_1$ in die vorige Formel erhält man:

$$F = i\mathfrak{H} l \sin\theta,$$

und folglich ist die Kraftwirkung auf die Längeneinheit des Leiters:

$$f = i\mathfrak{H} \sin \theta. \tag{15}$$

Man kann folglich den Schluss ziehen:

Ein gleichförmiges magnetisches Feld übt auf einen geradlinigen, vom Strome durchflossenen Leiter Kraftwirkungen aus, welche senkrecht zur Richtung des Stromes und des Feldes und nach der linken Seite des Stromes gewendet sind, d. h. nach der linken Seite eines Beschauers, den man sich in dem Leiter in der Richtung des Stromes schwimmend und in die Richtung des Feldes blickend vorstellen kann.

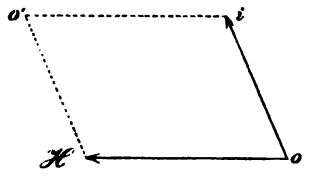

Fig. 116.

Die Grösse der Kraftwirkung für die Längeneinheit des Leiters ist von dem Produkte aus Strom- und Feldstärke und dem Sinus des von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkels gegeben, oder, wenn wir wollen, von dem Flächeninhalt des Parallelogrammes $Oio'\mathfrak{H}$ (Fig. 116), *dessen Seiten die Vektoren sind, welche bezw. die Strom- und die Feldstärke darstellen.*

Die Richtung der Kraft kann auch auf folgende Weise bestimmt werden:

Denkt man sich den Maxwell'schen Korkzieher in O stehend, so ist die Richtung der Kraft diejenige, in welcher der Korkzieher fortschreitet, wenn der Griff in dem Sinne sich dreht, dass i sich $\mathfrak{H}$ nähert.

Wir haben die von einem gleichförmigen Felde auf einen geradlinigen Leiter ausgeübte Wirkung ins Auge gefasst. Ist das Feld nicht gleichförmig oder der Stromträger nicht geradlinig, so kann man doch die Kraft, die auf den Strom wirkt, noch durch die Formel (15) berechnen, indem man denselben in viele Teile zerlegt denkt, für welche diese Bedingungen als erfüllt angenommen werden können.

Für ein Element mit der Länge dl eines Stromkreises, in welchem die Stromstärke i herrscht, können wir annehmen, die Feldstärke $\mathfrak{H}$ sei konstant in dem unendlich kleinen Raume, in dem das Element liegt, und folglich ist die Kraft df, mit welcher das Feld auf das Stromelement wirkt,

$$df = i\mathfrak{H}\, dl \sin \theta. \tag{16}$$

Diese Beziehung gestattet, alle Aufgaben zu lösen, die wir uns bezüglich der Kräfte, die ein magnetisches Feld auf einen Strom ausübt, stellen

können; sie ist allgemein und führt, auf die einzelnen Elemente angewandt, das physikalische Problem auf eine mathematische Integrationsaufgabe zurück.

105. Ströme in dem von einer einzigen Masse erzeugten Felde. Kreisstrom. Elektromagnetische Einheit der Stromstärke. — Man betrachte ein Stromelement AB von der Länge dl in der Entfernung r vom Punkte m, in welchem sich die das Feld hervorbringende Masse $+m$ befindet. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist gleich $\frac{m}{r^2}$, und die Kraftwirkung auf das Element dl ist der Grösse nach:

$$df = \frac{midl}{r^2} \sin\theta$$

und der Richtung nach normal zur Ebene MAB.

Wenn $\theta = 90^0$ ist, so hat die Kraft den höchsten Wert

$$df = \frac{midl}{r^2}.$$

Man betrachte im besonderen eine im Mittelpunkt eines Kreisstromes gelegene Masse $+m$. Die Stromstärke sei i und die Stromrichtung die in Fig. 117 angedeutete; für jedes Element ist $\theta = 90^0$, und folglich ist die Kraftwirkung des Feldes auf einen Teil des Stromkreises von der Länge l

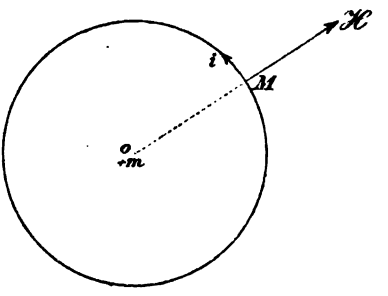

Fig. 117.

$$F = \frac{mi}{r^2} l, \tag{17}$$

und zwar in bezug auf die Zeichnungsebene von hinten nach vorn gerichtet. Die vom Teile l des Stromkreises auf die Masse m ausgeübte Kraftwirkung ist gleich, aber entgegengesetzt jener, mit welcher die Masse m auf den Strom wirkt, d. h. sie ist nach der linken Seite eines Beschauers gerichtet, welcher nicht mehr in die Richtung des Feldes, sondern gegen die Masse m hin blickt, was uns übrigens schon durch die Ampère'sche Regel für die von Strömen erzeugten Felder bekannt war.

Für den ganzen Umfang des Kreises hat diese Kraftwirkung den Wert

$$F = 2\pi \frac{mi}{r}.$$

Der hier betrachtete Fall giebt uns eine neue Definition der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke.

Eine die Länge $l = 1$ besitzende Strecke eines Kreisstromes vom

Radius $r = 1$, welcher von einem Strome mit der Stärke i durchflossen ist, übt auf die in seinem Mittelpunkte gelegene Einheitsmasse eine Kraft $f = i$ aus.

Es wird daher $i = 1$ sein, wenn $f = 1$, d. h.

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist die Stärke jenes Stromes, welcher einen Kreis mit dem Radius Eins umfliessen muss, damit ein die Länge Eins besitzender Teil des Kreisumfangs auf die magnetische, im Mittelpunkte gelegene Einheitsmasse die Kraft Eins ausübe.

§ 2.

Elektromotorische Kräfte, welche von Änderungen der magnetischen Verschiebung hervorgebracht sind.

106. Elektromagnetische Induktion. — Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, wie ein in einem magnetischen Felde vorhandener elektrischer Strom eine Energie darstellt, und wie man durch eine Veränderung dieses Systems eine Änderung der Energie hervorrufen kann; wir haben dadurch ein Mittel an der Hand, durch einen elektrischen Strom Arbeit zu gewinnen oder abzugeben.

Ist das allgemeine Prinzip, das wir als Folgerung des Ohm'schen Gesetzes und der Definition des Potentials [58] abgeleitet und schon für den Fall der Leistung chemischer Arbeiten des Stromes [59] bestätigt gefunden haben, auch auf die hier betrachteten Fälle anwendbar, so können wir leicht vorhersehen, dass jedesmal, wenn Arbeit durch eine beliebige Veränderung in dem System eines magnetischen Feldes und eines elektrischen Stromes verrichtet wird, der Stromkreis Sitz einer E. M. K. sein muss.

Wenn wir auf das System, welches von einem gleichförmigen magnetischen Felde und einem Stromkreise mit einem beweglichen, geradlinigen Teile [104] gebildet ist, zurückgreifen und durch einen Arbeitsaufwand das Stück γ zur Bewegung in der Richtung u (entgegengesetzt zur Richtung der Kraft F, welche das Feld auf den Strom ausübt) zwingen, so muss das Stück γ Sitz einer E. M. K. sein, welche einen Strom in der Richtung i hervorzurufen imstande ist. Es wird dagegen der Sitz einer entgegengerichteten E. M. K. sein, wenn man das Gleitstück γ frei beweglich unter der Wirkung der Kraft F lässt.

Die Thatsachen, die wir jetzt aus der Theorie entwickeln können, wurden experimentell von Faraday entdeckt und werden vollständig von der Erfahrung bestätigt.

Zwischen der von äusseren Kräften in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit w, der Stromstärke i und der erzeugten E. M. K., die positiv angenommen wird, wenn sie die Richtung von i hat, haben wir [58] die Beziehung bestehend gefunden:

$$e = \frac{w}{i}.$$

Nun ist in unserem Falle die Energie des Systems:

$$W = -i\varphi;$$

wenn der Fluss in der Zeit dt eine Zunahme $d\varphi$ erfährt, so ist die von äusseren Kräften in der Zeit dt geleistete Arbeit $-id\varphi$ und folglich in der Zeiteinheit $w = -i\frac{d\varphi}{dt}$.

Daher muss der Stromkreis, wenn die Beziehung $e = \frac{w}{i}$ auch in diesem Falle anwendbar ist, der Sitz einer E. M. K.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{18}$$

sein.

Die E. M. K. (als positiv betrachtet, wenn sie dem Strome gleichgerichtet ist) ist gleich der in der Zeiteinheit erfolgenden Verminderung der Zahl der den Stromkreis durchsetzenden Kraftlinien.

Aus der Formel (18) ergiebt sich die Unabhängigkeit der E. M. K. von der Stromstärke; sie muss also denselben Wert behalten, auch wenn der Wert der Stromstärke sich ändert. Es muss ferner eine E. M. K. in einem Stromkreise entstehen, selbst wenn dieser von keinem Strome durchflossen wird, falls nur der Fluss der Kraftlinien, der die von dem Stromkreis umgrenzte Fläche durchsetzt, einen anderen Wert annimmt.

Auch diese Thatsache wurde experimentell von Faraday nachgewiesen, welcher der Gesamtheit der beschriebenen Erscheinungen den Namen *elektromagnetische* oder *magnetoelektrische Induktion* erteilte. Man nennt ferner *induzierte E. M. K.* die erzeugte E. M. K., *induzierten Strom* den Strom, den diese E. M. K. im *induzierten Stromkreise* hervorruft, wenn letzterer geschlossen ist, *induzierendes Feld* das magnetische Feld.

Die Beziehung (18), welche die Grundlage für die Behandlung der Erscheinungen der elektromagnetischen Induktion bildet und von uns theoretisch abgeleitet wurde, ist vollständig im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen; es liefert uns dies einen weiteren Beweis für die Richtigkeit der Grundlagen, auf denen wir die oben entwickelte Theorie aufgebaut haben.

Es wird nützlich sein, einige praktische Regeln anzugeben, welche die Richtung der induzierten E. M. K. leicht zu bestimmen gestatten.

Man betrachte wieder den einfachen Fall des geradlinigen, in einem gleichförmigen Felde beweglichen Leiters γ [104]. Man denke sich den Beschauer, wie Ampère angiebt, in die Richtung des Feldes blickend und so in dem Leiter gewissermassen schwimmend, dass die Richtung der Vorwärtsbewegung mit der Stromrichtung zusammenfällt. Wenn der Leiter sich in dem Sinne u bewegt, so schneidet der Beschauer Kraftlinien mit dem rechten Arme, und die E. M. K. hat die Richtung des Stromes von den Füssen zum Kopf des Beschauers; wenn sich dagegen der Leiter in dem Sinne F bewegt, so schneidet der Beschauer Kraftlinien mit dem linken Arme, und die E. M. K. hat entgegengesetzte Richtung. Je nachdem bei der Bewegung des Leiterstücks Kraftlinien mit dem rechten oder mit dem linken Arme geschnitten werden, hat die E. M. K. die Richtung von den Füssen zum Kopf des Beschauers oder die entgegengesetzte.

Allgemein findet man, dass bei einer beliebigen Bewegung des Leiters eine gewisse Zahl von Kraftlinien mit dem rechten und eine gewisse andere mit dem linken Arme geschnitten wird; die Differenz dieser beiden Zahlen heisst *Zahl der geschnittenen Kraftlinien* und ist gleich der Änderung des die Stromfläche durchsetzenden Flusses.

Die für den einfachen Fall des geradlinigen Leiters γ ermittelte Regel kann ohne weiteres auf den allgemeinen Fall eines beliebig geformten Leiters ausgedehnt werden:

Ein in einem magnetischen Felde beweglicher Leiter ist der Sitz einer E. M. K., wenn die Zahl der bei seiner Bewegung geschnittenen Kraftlinien nicht gleich Null ist. Die E. M. K. ist von den Füssen zu dem Kopf eines Beschauers gerichtet, welcher, gewissermassen innerhalb des Leiters in der Richtung des Stromes schwimmend, in die Richtung des Feldes blickt und bei der Bewegung Kraftlinien mit dem rechten Arme schneidet, und entgegengesetzt gerichtet, wenn die Kraftlinien mit dem linken Arme geschnitten werden.

Eine andere, für den praktischen Gebrauch sehr zweckmässige Regel ist die von Fleeming-Jenkin:

Man strecke den Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand so aus, dass dieselben sämtlich rechtwinklig zu einander stehen, und nehme als positive Richtung der Finger diejenige von der Handwurzel nach den Spitzen an. Wenn man den Daumen in der Richtung der Bewegung und

den Zeigefinger in der des induzierenden Feldes hält, so giebt der Mittelfinger die Richtung der induzierten E. M. K. an.

Eine Regel, die immer anwendbar ist, ganz gleichgiltig, wie die Änderung des Flusses hervorgebracht wird, auch ohne Bewegung eines Teiles des Stromkreises, ist die folgende:

Die induzierte E. M. K. hat die Richtung der rotierenden Bewegung eines in der Richtung des Feldes fortschreitenden Korkziehers, wenn der die Stromfläche durchsetzende Fluss abnimmt.

107. Gesetze von Lenz und Neumann. — In dem einfachen Falle eines geradlinigen Leiters γ haben wir gesehen [104], dass das gleichförmige magnetische Feld ponderomotorische Kräfte ausübt, welche die Richtung F oder die entgegengesetzte u haben, je nachdem der Strom die Richtung i oder die entgegengesetzte besitzt. Bewegt sich nun der Leiter in der Richtung F, so ist der induzierte Strom zu i entgegengerichtet, bewegt er sich dagegen in der Richtung u so hat der Strom die Richtung i; in beiden Fällen übt also das magnetische Feld auf den induzierten Strom Kräfte aus, welche die den Strom hervorbringende Bewegung zu hemmen suchen.

Diese Eigenschaft hat eine ganz allgemeine Giltigkeit. Man kann also den Satz aussprechen:

Auf den Strom, der in einem geschlossenen Stromkreise durch die Bewegung eines seiner Teile hervorgerufen wird, übt das induzierende Feld Kräfte aus, die sich der Bewegung selbst entgegensetzen.

Dieses zum ersten Male von Lenz ausgesprochene Gesetz kann bei dem heutigen Stande der physikalischen Studien als eine selbstverständliche Folgerung des Prinzips von der Erhaltung der Energie aufgefasst werden; die von dem induzierten Strome dargestellte Energie muss sich notwendigerweise aus der Transformation einer anderen Energieform ergeben, und zwar der Arbeit, die aufgewandt wird, um die Bewegung gegen die Reaktionskräfte des Feldes, welche sich der Bewegung selbst entgegensetzen, hervorzubringen.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$e = \frac{w}{i}$$

können wir das *Neumann'sche Gesetz* ableiten, welches den Wert der indu-

zierten E. M. K. bestimmt. Setzen wir in diesem Ausdruck $i = 1$, so ergiebt sich

$$e = w,$$

woraus folgt:

Die bei der Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Felde induzierte E. M. K. ist numerisch gleich der Arbeit, die man in der Zeiteinheit aufwenden muss, um die Bewegung des Leiters hervorzubringen, wenn derselbe von einem Strome mit der Intensität Eins durchflossen wird.

108. Induzierte Elektrizitätsmenge. — Es soll die gesamte Elektrizitätsmenge Q, welche in dem induzierten Stromkreise durch eine bestimmte Änderung des induzierenden Flusses vom Werte φ_1 zum Werte φ_2 erzeugt wird, berechnet werden.

Bedeutet r den Widerstand des Stromkreises, so ist die Stärke des induzierten Stromes in einem Moment, in welchem die induzierte E. M. K. den Wert $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ besitzt, nach dem Ohm'schen Gesetze [111]:

$$i = \frac{e}{r} = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt},$$

woraus folgt:

$$idt = -\frac{1}{r}d\varphi.$$

Nun ist idt die Elektrizitätsmenge, die in der Zeit dt den Stromkreis durchfliesst, folglich hat man durch Integration über die ganze Zeit, während welcher die Änderung des Flusses stattfindet:

$$Q = \int idt = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}. \tag{19}$$

Die gesamte von einer Änderung des Flusses induzierte Elektrizitätsmenge ist durch das Verhältnis dieser Änderung zum Widerstand des Stromkreises ausgedrückt.

Der Wert Q hängt also nur von den Endwerten des Flusses, und nicht von den Zwischenwerten, ab.

Wenn im besondern $\varphi_1 = \varphi_2$ ist, wird $Q = 0$, d. h. wenn der induzierende Fluss so variiert, dass er am Ende den ursprünglichen Wert wieder annimmt, dann wird der Leiter von zwei entgegengesetzt gleichen Elektrizitätsmengen durchflossen, und die gesamte induzierte E. M. K. ist gleich Null.

109. Allgemeine Beziehung zwischen der Änderung der magnetischen Verschiebung und der induzierten E. M. K. — In den Entwickelungen

der vorigen Abschnitte haben wir uns vornehmlich auf den einfachen Fall eines Stromkreises bezogen, welcher einen geradlinigen, in einem magnetischen Felde beweglichen Teil besass; doch gilt die Beziehung (18), wie wir schon bemerkt haben, ganz allgemein. Die Herleitungsweise, durch welche wir dieselbe ermittelt haben, zeigt uns, dass die induzierte E. M. K. lediglich von der Änderung des den Stromkreis durchsetzenden Flusses und nicht von der Art, in welcher diese Änderung hervorgebracht wird, abhängt. Die Änderung des Flusses kann durch die Bewegung des Stromkreises oder des magnetischen Feldes, oder durch die Änderung der Permeabilität des Mediums, in welchem das Feld vorhanden ist, oder endlich durch eine Änderung der das Feld hervorbringenden Ursachen entstehen; unabhängig von der Art, in welcher man die Änderung des Flusses durch die Stromfläche und folglich die der magnetischen Verschiebung erzielt, immer entsteht im Stromkreise eine E. M. K. $e = -\frac{d\varphi}{dt}$.

Im Anfang dieses Kapitels haben wir gesagt, dass man bei der Behandlung des Elektromagnetismus zwei Klassen von Erscheinungen zu betrachten hat, und zwar eine durch eine Änderung der elektrischen Verschiebung hervorgebrachte magnetische und eine durch eine Änderung der magnetischen Verschiebung hervorgerufene elektrische Verschiebung, und ferner, dass für die beiden Klassen von Erscheinungen dasselbe Gesetz gilt.

Wir können jetzt die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen.

In der That gilt für die erste Klasse die allgemeine Beziehung:

$$\int \mathfrak{H}_i \varrho\, dl = 4\pi \sum Ni, \tag{9}$$

für die zweite:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}. \tag{18}$$

Erinnern wir uns nun, dass $\sum Ni$ die gesamte Elektrizitätsmenge ist, die in der Zeiteinheit durch die betrachtete, geschlossene Linie hindurchgeht, d. h. die Änderung der elektrischen Verschiebung, ferner, dass die Summe e der in einem geschlossenen Stromkreise wirkenden E. M. KK. das Integral der elektrischen Kraft längs des Stromkreises ist, und endlich, dass $\frac{d\varphi}{dt}$ die Änderung der magnetischen Induktion durch die Stromfläche in der Zeiteinheit, d. h. nach der Formel (20) [80] gleich der Änderung der Verschiebung multipliziert mit 4π ist, so können wir leicht einsehen, dass die beiden Beziehungen (9) und (18) in das folgende einfache Gesetz zusammengefasst werden können:

Das Integral der magnetischen oder der elektrischen Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Linie ist, abgesehen von dem konstanten Faktor 4π, bezw. gleich der Änderung der elektrischen oder der magnetischen Verschiebung in dieser Linie.

110. Ströme, induziert durch Änderung der Stromstärke. Koeffizient der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion. — Besondere Beachtung verdient der Fall, in welchem das induzierende magnetische Feld von einem elektrischen Strome herrührt; eine Änderung dieses Stromes bringt eine Änderung der Feldstärke und des den induzierten Stromkreis durchsetzenden Flusses mit sich und ruft folglich im Stromkreise eine induzierte E. M. K. hervor. Auch diese Thatsache wurde von Faraday entdeckt, welcher den Strom, der das induzierende Feld hervorbringt, *induzierenden Strom* nannte. Die Erfahrung lehrt, dass die induzierte E. M. K. auch in diesem Falle numerisch gleich der Änderung des Induktionsflusses ist.

Nehmen wir einen einfachen, besonderen Fall an, welchen wir betrachten, um einige Definitionen festzusetzen.

A und B seien geschlossene Stromkreise (Fig. 118), und der sie umgebende Raum, d. h. der Raum, in welchem die von dem in einem beliebigen derselben fliessenden Strome erzeugten Induktionslinien verlaufen, sei mit einer Substanz, deren Permeabilität unabhängig von den Werten der magnetischen Kraft und Induktion ist, z. B. mit Luft ausgefüllt. Fliesst ein Strom i_a in dem Sinne des Pfeiles im Stromkreise A, so wird eine gewisse Zahl von Induktionslinien in der Richtung φ_a verlaufen, welche sich aussen schliessen. Einige von diesen Linien werden auch die Stromfläche B durchsetzen; der Wert des Flusses φ_b, den der Strom i_a durch den Stromkreis B schickt, hängt lediglich, da die Permeabilität des Mediums als konstant vorausgesetzt worden ist, von der Stromstärke i_a, von der Form und der gegenseitigen Lage der beiden Stromkreise ab; man kann also

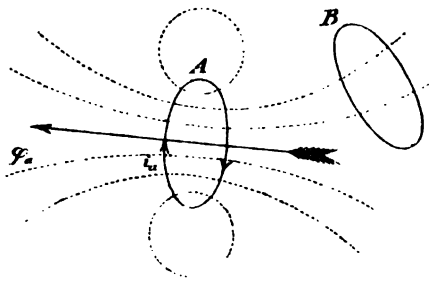

Fig. 118.

$$\varphi_b = Mi_a$$

setzen, worin M eine nur von der geometrischen Anordnung des gegebenen Systems abhängige Konstante bedeutet.

In analoger Weise bringt ein Strom i_b in dem Stromkreise B

einen magnetischen Fluss hervor, von dem ein Teil den Stromkreis A durchdringt.

Bezeichnet M' eine Konstante, welche ebenfalls nur von der geometrischen Anordnung des Systems abhängt, so kann man ferner setzen:

$$\varphi_a = M' i_b.$$

Man nehme jetzt an, beide Ströme i_a und i_b seien gleichzeitig vorhanden. Dieses System stellt dann eine gewisse Energie dar, deren Wert man ermitteln kann, sowohl indem man den Strom i_a in dem vom Strome i_b erzeugten Felde, als auch indem man den Strom i_b in dem vom Strome i_a erzeugten Felde betrachtet. Im ersten Falle ist die Energie durch

$$-\varphi_a i_a = -M' i_b i_a$$

und im zweiten durch

$$-\varphi_b i_b = -M i_a i_b$$

ausgedrückt.

Indem man die beiden Ausdrücke der Energie des Systems einander gleich setzt, erhält man:

$$M = M'$$

und folglich:

(20) $$\varphi_a = M i_b, \qquad \varphi_b = M i_a.$$

Man betrachte nunmehr den Stromkreis A als induzierend und den Stromkreis B als induziert. Wird jetzt eine Änderung der Stromstärke i_a hervorgebracht, so ändert sich der Wert des Flusses φ_b, und es entsteht im Stromkreise B eine E. M. K.

(21) $$e_b = -\frac{d\varphi_b}{dt} = -M\frac{di_a}{dt}.$$

In analoger Weise findet man, wenn man den Stromkreis B als induzierend und den Stromkreis A als induziert ansieht, dass im Stromkreise A infolge einer Veränderung der Stromstärke i_b eine E. M. K. entsteht:

$$e_a = -\frac{d\varphi_a}{dt} = -M\frac{di_b}{dt}.$$

Es folgt also, dass die induzierte E. M. K. in einem Stromkreise, die Permeabilität des Mediums als konstant vorausgesetzt, nur von der Änderung der Stromstärke in dem anderen Stromkreise abhängt.

Der Faktor M, welcher eine Konstante für zwei gegebene Stromkreise ist und derselbe bleibt, gleichgiltig, welcher von den beiden Stromkreisen als induziert, und welcher als induzierend gewählt wird, heisst *Koeffizient der gegenseitigen Induktion* beider Stromkreise.

Von diesem Koeffizienten können zwei Definitionen gegeben werden (welche in dem einfachen behandelten Falle gleichwertig sind); wir können nämlich den Faktor M definieren, indem wir entweder von der Betrachtung der Flüsse oder von der Betrachtung der induzierten E. M. K. ausgehen.

Setzt man in der Formel (20) $i_b = 1$, $i_a = 1$, so ist

$$\varphi_a = M \qquad \varphi_b = M,$$

und man kann daher sagen:

Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise ist gleich dem Induktionsflusse, der einen beliebigen derselben durchsetzt, wenn der andere von einem Strome mit der Stärke Eins durchflossen wird.

Setzt man in der Formel (21) $\frac{di_a}{dt} = 1$, $\frac{di_b}{dt} = 1$, so ist in absolutem Werte

$$e_a = M, \quad e_b = M.$$

Wir können also noch folgende Definition anfügen:

Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise ist in absolutem Werte gleich der E. M. K., die in einem beliebigen derselben induziert wird, wenn in dem anderen die Stromstärke in der Zeiteinheit um die Einheit variiert.

Der Wert des Koeffizienten M ändert sich mit der Form und der Lage der beiden Stromkreise. Man nehme an, dass der eine Stromkreis z. B. A unverändert festgehalten werde, während der andere Stromkreis stetige Veränderungen in seiner Form und Lage erfahre; dann ändert sich auch M kontinuierlich, weil der von dem Strome in A hervorgebrachte Fluss durch B stetig variiert. Wenn der Stromkreis B sich immer mehr der Form und Lage des Stromkreises A nähert, bis er endlich mit diesem zusammenfällt, so nimmt M eine Reihe von Werten an, welche einem bestimmten Grenzwert zustreben, der nur von der Form und der Lage des Stromkreises A abhängt. Dieser Grenzwert, den wir mit L bezeichnen wollen, heisst *Koeffizient der Induktion des Stromkreises auf sich selbst* oder *Koeffizient der Selbstinduktion* oder auch nach dem Vorschlag der englischen Techniker und gemäss der offiziellen Annahme auf dem internationalen Kongress in Chicago *Induktanz*.

Nach Einführung dieses Koeffizienten lässt sich der von einem Strome durch seinen eigenen Stromkreis hervorgebrachte Fluss durch

(20′) $$\varphi = Li$$

ausdrücken; wenn i variiert, so variiert auch der Fluss φ, und folglich entsteht im Stromkreise eine E. M. K.

$$e = -L\frac{di}{dt}. \tag{21'}$$

Variiert die Stromstärke in einem Stromkreise, so ist dieser der Sitz einer E. M. K., welche dieselbe Richtung, wie der Strom besitzt, wenn dessen Stärke abnimmt, und die entgegengesetzte, wenn die Stromstärke wächst, d. h. wenn di positiv ist.

Auch diese Thatsache, die wir als Folgerung der Formel (18) abgeleitet haben, wurde experimentell von Faraday bewiesen. Bis jetzt haben wir zwei Stromkreise in einem Raume betrachtet, wo die magnetische Permeabilität einen konstanten Wert unabhängig von dem Werte der magnetischen Kraft und der Stärke des induzierenden Stromes besass. Wenn jedoch μ nicht konstant ist, so ist der von einem Strome durch den anderen Stromkreis hervorgebrachte Fluss nicht mehr der Stromstärke proportional, sondern er hängt von dem Werte der magnetischen Permeabilität ab. Alle Formeln und Definitionen, die wir vorher festgesetzt haben, verlieren ihre Bedeutung, und der Vorteil, die Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion zu betrachten, hört im allgemeinen auf, weil es, da sie nicht konstant sind, für die Berechnung der induzierten E. M. K. zweckmässiger ist, sich der allgemeinen Formel (18) zu bedienen.

Es kann jedoch in manchen Fällen die Betrachtung der Induktionskoeffizienten auch für einen Raum mit veränderlicher Permeabilität von Vorteil sein. Die Induktionskoeffizienten hängen dann nicht allein von der geometrischen Anordnung des Systems, sondern auch von der Stärke des induzierenden Stromes ab; sie sind sogar, wenn das Medium hysteretisch ist, nicht nur von dem letzten, sondern auch von den vorhergehenden Werten der Stromstärke abhängig.

Man kann beide für den besonderen, betrachteten Fall angegebene Definitionen auf den allgemeinen Fall ausdehnen; sie hören dann aber auf, gleichwertig zu sein.

Wenn man den Induktionsfluss betrachtet, so existiert ein konstantes Verhältnis des induzierten Flusses zum induzierenden Strome nicht mehr, d. h. es bestehen die Beziehungen (20) und (20') nur dann, wenn M und L als variabel angesehen werden. Man kann unter dieser Annahme die veränderlichen Quotienten

$$M = \frac{\varphi_a}{i_b} = \frac{\varphi_b}{i_a}, \qquad L = \frac{\varphi}{i}, \tag{22}$$

oder, wenn man will, ihre der Einheit der Stromstärke entsprechenden

Werte, d. h. die Werte des von einem induzierenden Strome mit der Stärke *Eins* induzierten Flusses, doch noch als Koeffizienten der gegenseitigen Induktion bezw. der Selbstinduktion bezeichnen. In diesem Falle müssen notwendigerweise die induzierten E. M. KK. in folgender Form:

$$e_a = -\frac{d(Mi_b)}{dt}, \quad e_b = -\frac{d(Mi_b)}{dt}, \quad e = -\frac{d(Li)}{dt}$$

geschrieben werden.

Die induzierten E. M. KK. können aber auch in der Form (21) (21′) dargestellt werden, wenn man mit M und L zwei veränderliche Koeffizienten bezeichnet, welche andere Werte als die vorherbetrachteten besitzen. In der That ergiebt sich aus der Formel (21′):

$$L = -\frac{e}{\frac{di}{dt}} = -\frac{-\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{d\varphi}{di}, \tag{22′}$$

und in analoger Weise aus der Formel (21):

$$M = \frac{d\varphi_a}{di_b} = \frac{d\varphi_b}{di_a}. \tag{22″}$$

Auch in diesem Falle kann man diese veränderlichen Koeffizienten M und L, d. h. die Grössen, mit welchen man die Änderung des induzierenden Stromes in der Zeiteinheit multiplizieren muss, um die induzierte E. M. K. zu ermitteln, als Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion bezeichnen.

Diese Definition muss als offiziell adoptiert betrachtet werden, weil dieselbe bei der Definition der Einheit der Induktanz (Henry) vorausgesetzt wird, welche von dem internationalen Kongress in Chicago festgesetzt wurde.

Ein Stromkreis, in welchem eine E. M. K. Eins entsteht, wenn der induzierende Strom in der Zeiteinheit um die Einheit variiert, besitzt die Einheit der Induktanz.

Fünftes Kapitel.

Veränderliche Ströme.

§ 1.

Grundgesetze und allgemeine Betrachtungen.

111. Ohm'sches Gesetz. Wird ein Stromkreis von einem mit der Zeit sich ändernden Strome durchflossen, so superponiert sich zu der in jedem Augenblicke infolge der in dem Kreise wirksamen Stromquelle herrschenden E. M. K. e die durch die Selbstinduktion in dem Kreise jeweilig hervorgerufene E. M. K.: $-\frac{d\varphi}{dt}$, und die gesamte in dem betrachteten Moment im Stromkreise wirksame E. M. K. ist gleich: $e-\frac{d\varphi}{dt}$.

Obwohl die Giltigkeit des Ohm'schen Gesetzes nur für Gleichströme bewiesen worden ist, so sind wir doch durch die Gesamtheit der Erfahrungen berechtigt, dasselbe auf den Fall von veränderlichen Strömen auszudehnen und in allgemeiner Form folgendermassen auszusprechen:

In einem von veränderlichem Strome durchflossenen Stromkreise ist die Stromstärke in einem bestimmten Moment durch den Quotienten aus der Summe aller in jenem Moment in dem Stromkreise herrschenden E. M. KK. und dem Widerstand des Stromkreises gegeben.

In einem geschlossenen Stromkreise besteht also in jedem Augenblick für den ganzen Kreis zwischen der E. M. K. und der Stromstärke die allgemeine Beziehung:

$$e-\frac{d\varphi}{dt}=ri; \tag{1}$$

für einen Teil des Stromkreises dagegen, zwischen dessen Endstellen eine Potentialdifferenz v herrscht, gilt die Gleichung:

$$v+e-\frac{d\varphi}{dt}=ri. \tag{1'}$$

112. Extraströme beim Schliessen und Öffnen des Stromkreises. Die Beziehung (1) kann auch in die Form

$$i_1 - i_2 = i$$

gebracht werden, wobei $i_1 = \frac{e}{r}$ der Wert ist, den die Stromstärke haben würde, wenn in dem Stromkreise, ohne dass in demselben Wirkungen der Selbstinduktion zu spüren wären, nur die E. M. K. e wirkte, während $i_2 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt}$ der Wert der Stromstärke ist, die sich zu i_1 superponiert infolge des Auftretens einer durch die Änderung der Stromstärke hervorgerufenen E. M. K. der Selbstinduktion.

Diese Überlegungen sind besonders wichtig für die Betrachtung des Falles, dass die E. M. K. e und folglich auch die Stromstärke in einem Stromkreise von einem konstanten zu einem anderen ebenfalls konstanten Wert übergeht.

In einem Stromkreise z. B., in welchen ein Element mit einer gewissen E. M. K. e eingeschaltet ist, geht die E. M. K. beim Schliessen des Stromkreises vom Werte Null zum Werte e über und die Stromstärke vom Werte $i = 0$ zum Werte $i = i_1 = \frac{e}{r}$; beim Öffnen des Stromkreises dagegen fällt die E. M. K. vom Werte e bis zu Null und somit auch die Stromstärke vom Werte i_1 bis zu Null. In der kurzen Zeit, während welcher der Strom sich in seiner Stärke ändert, kommt zu der normalen Stromstärke i_1 die Stromstärke i_2 des induzierten Stromes hinzu. Beim Schliessen ist der Strom i_2 dem Strom i_1 entgegengerichtet, weil der Fluss von dem Werte Null bis zu seinem normalen Werte wächst; beim Öffnen dagegen nimmt der Fluss ab, und folglich hat i_2 dieselbe Richtung, wie i_1. Diese durch Induktionswirkung hervorgerufenen Ströme i_2 nennt man *Extraströme* und zwar bezw. *Schliessungs-* und *Öffnungsextrastrom*. Dieselben sind zuerst von Faraday experimentell nachgewiesen worden.

113. Arbeit eines veränderlichen Stromes. Innere Stromenergie. Die Gleichung (1) lässt sich durch Multiplikation beider Seiten mit idt auf die Form:

$$eidt = ri^2dt + id\varphi$$

bringen.

Das erste Glied dieser Gleichung stellt die Arbeit dar, welche die E. M. K. e in der Zeit dt leistet, d. h. die Arbeit, die man aufzuwenden hat, um den Strom zu erhalten, und das zweite Glied giebt an, was aus dieser Arbeit wird; der Posten ri^2dt ist die in Wärme umgesetzte Arbeit, der Joule'sche Effekt, und der Posten $id\varphi$ stellt die Arbeit dar, die nötig ist, um den Fluss φ zu verändern.

Bleiben wir bei der Betrachtung dieser Arbeitsgrösse $id\varphi$ und versuchen wir zunächst, dieselbe anders auszudrücken. Betrachten wir den Stromkreis der Fig. 119 und stellen wir uns das von ihm hervorgebrachte Feld in viele unendlich dünne Induktionsröhren zerlegt vor. Bezeichnet ψ den Wert des Flusses längs einer dieser Röhren, so ist der gesamte Fluss durch die Gleichung:

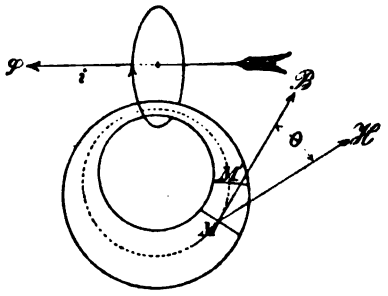

Fig. 119.

$$\varphi = \sum\psi$$

gegeben.

Für die Änderung des Flusses in der Zeit dt gilt dann:

$$d\varphi = \sum d\psi$$

und folglich ist:

$$id\varphi = i\sum d\psi = \sum id\psi.$$

Es wird also genügen, den Posten $id\psi$ für eine beliebige der betrachteten, unendlich dünnen Flussröhren zu berechnen und die Summierung über die Gesamtheit dieser Röhren auszuführen.

Längs jeder Röhre ist der Fluss ψ konstant, und wenn a den Flächeninhalt eines beliebigen Schnittes M und $\mathfrak{B}$ den Wert der magnetischen Induktion in demselben bedeutet, so ist:

$$d\psi = a d\mathfrak{B}.$$

Nun lässt sich das Integral der magnetischen Kraft längs der Induktionslinie, welche durch die Achse der betrachteten Röhre dargestellt wird, nach Formel (9) [100] ausdrücken, wie folgt:

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi i,$$

worin ds das zwischen den einander unendlich nahen Röhrenschnitten M und M' gelegene Linienelement und $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{H}\cos\theta$ die Tangentialkomponente der Kraft bedeutet. Daraus ergiebt sich:

$$i = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s ds,$$

und folglich:

$$id\psi = \frac{a d\mathfrak{B}}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{4\pi}\int a d\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}_s ds.$$

Nun aber ist $ads = dv$ das von den beiden Schnitten M und M' der Röhre begrenzte Volumenelement; man kann also setzen:

$$id\psi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s d\mathfrak{B} dv.$$

Um die Arbeit $id\psi$ zu ermitteln, hat man für jede Röhre dieses über die ganze Röhre ausgedehnte Integral auszurechnen. Die Summe aller dieser Integrale ist dann $= id\varphi$, und wir können daher schreiben:

$$id\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s d\mathfrak{B} dv, \tag{2}$$

wobei jetzt das Integral über das ganze Volumen des magnetischen Feldes ausgedehnt werden muss.

Der Wert des zweiten Gliedes dieses Ausdruckes ist derselbe, wie derjenige, den man erhalten würde, wenn man für jedes Volumenelement des Feldes eine Arbeit $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}_s d\mathfrak{B} dv$, d. h. für jede Volumeneinheit eine Arbeit

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}_s d\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\cos\theta d\mathfrak{B}$$

aufwenden müsste.

Der so ermittelte Ausdruck der Arbeit durch ein auf das ganze Feld ausgedehntes Volumenintegral entspricht der modernen Behandlung der magnetischen Felder, bei welcher die magnetische Induktion und Verschiebung nicht als die Folge einer Fernwirkung, sondern einer besonderen Deformation des den ganzen Raum ausfüllenden Mediums aufgefasst werden. Nach dieser Anschauung muss die zur Erzeugung der Deformation nötige Arbeit im ganzen Raume verteilt sein.

Es ist indessen wichtig, zu beachten, dass wir bei der Betrachtung von magnetischen Feldern, die von elektrischen Strömen herrühren, lediglich von den experimentellen Grunderscheinungen des Elektromagnetismus ausgehend, zu einem Ausdrucke für die zur Erzeugung einer Änderung im magnetischen Felde nötige Arbeit gelangt sind, welcher mit demjenigen übereinstimmt, den wir, von der Betrachtung der magnetischen Verschiebung ausgehend, allgemein für ein beliebiges magnetisches Feld ermittelt haben. Man gewinnt somit eine Bestätigung dafür, dass der Begriff Verschiebung, welcher nur durch die Beziehungen zwischen magnetischer Kraft und Induktion definiert worden war, in berechtigter Weise auch auf die Arbeit angewandt werden kann; es ist also das bei der Berechnung der Arbeit in einem magnetischen Felde [88] eingeschlagene Verfahren in aller Strenge giltig, und wir können die erhaltenen Resultate und die daraus gezogenen Schlüsse als durchaus richtig betrachten.

Kommen wir auf den ursprünglichen Ausdruck $id\varphi$ für die zur Erzeugung einer kleinen Veränderung $d\varphi$ des Flusses im Felde des Stromes i nötige Arbeit zurück.

Nehmen wir an, dass in einem beliebigen Stromkreise die Stromstärke vom Werte i_1 in den Wert i_2 übergehe; dementsprechend geht der Wert des Flusses von φ_1 über in φ_2. Es habe die Linie AMB (Fig. 120)

als Abscissen die Werte von i und als Ordinaten die zugehörigen Werte von φ. Diese Linie (die man konstruieren kann, wenn für alle Materialien, durch welche die vom Strome hervorgebrachten Flusslinien hindurchgehen, die zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ bestehende Beziehung bekannt ist, da i mit $\mathfrak{H}$ und φ mit $\mathfrak{B}$ proportional variiert) bietet eine geometrische Darstellung der Arbeit. In der That ist der Inhalt der Fläche $MmnN$, wenn wir zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte M und N der Kurve ins Auge fassen, deren Ordinaten Om und On um $d\varphi$ differieren, gleich $id\varphi$, d. h. gleich der Arbeit, die man aufwenden muss, um die Änderung $d\varphi$ des Flusses hervorzubringen. Die zur Erzeugung einer endlichen Änderung des Flusses vom Werte $\varphi_1 = Oa$ zum Werte $\varphi_2 = Ob$ verrichtete Arbeit ist gleich der Summe der Elementararbeiten, d. h. gleich dem Inhalte der Fläche $aAMBb$, welche von der Ordinatenachse, von der Kurve selbst und von den Abscissen der Endpunkte derselben begrenzt wird.

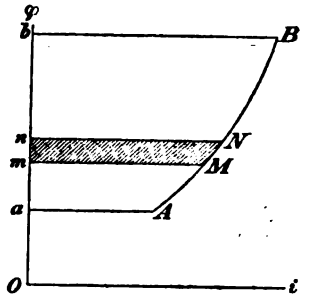

Fig. 120.

Nehmen wir nun an, dass der Wert des Flusses von φ_2 wieder zum anfänglichen Werte φ_1 übergehe. Hier können zwei Fälle eintreten.

Ist im Felde ein hysteretisches Material vorhanden, so erhält der Fluss φ einen grösseren Wert als denjenigen, welchen er vorher für denselben Wert von i hatte; man wird also bei dem Zurückgehen des Flusses auf den Wert φ_1 eine ganz oberhalb von $AMNB$ gelegene Kurve BQA erhalten (Fig. 121). Die Fläche $bBQAa$ stellt eine negative Arbeit dar, eine Arbeit, welche als zurückerstattet betrachtet werden kann, indem der Fluss auf den Wert φ_1 zurückkehrt. Es wird nicht die ganze Arbeit, die aufgewandt wurde, um den Wert des Flusses von φ_1 in φ_2 überzuführen, zurückgegeben, wenn der Fluss vom Werte φ_2 zum Werte φ_1 zurückkehrt, sondern ein Teil derselben, von der Fläche $AMBQA$ dargestellt, wird infolge der Hysteresis in Wärme umgesetzt.

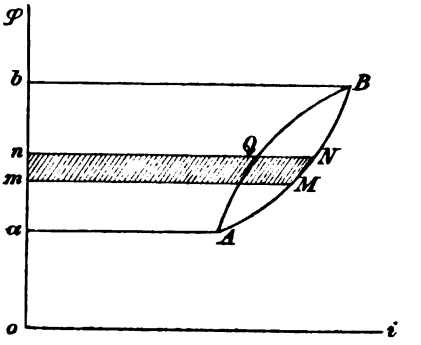

Fig. 121.

Wenn sich dagegen im Felde keine hysteretischen Materialien befinden, so nimmt der Fluss bei der Rückkehr für jeden einzelnen Wert von i den früheren Wert an, und man bekommt bei abnehmenden Werten

von i dieselbe Kurve $BNMA$. Es wird also die ganze zur Änderung des Flusses von φ_1 zu φ_2 aufgewandte Arbeit zurückgegeben, wenn der Fluss von φ_2 zum anfänglichen Wert φ_1 zurückkehrt. Während der Zeit, in welcher der Fluss den Wert φ_2 beibehält, kann diese Arbeit als in dem betreffenden Raume aufgespeichert angesehen werden.

In diesem Falle hat man in dem von einem elektrischen Strome erzeugten magnetischen Felde eine *potentielle Energie* zu betrachten, die im Felde aufgespeichert wird, wenn die Stromstärke und folglich der Fluss zunehmen, und die sich in Arbeit umsetzt, wenn die Stromstärke und der Fluss abnehmen.

Lässt man beispielsweise die Stromstärke von Null bis zum Werte i wachsen, so geht der Fluss von Null zum Werte φ über, welcher eine bestimmte Funktion von i ist, wenn im Felde keine mit Hysteresis behafteten Körper vorhanden sind. Um diese Veränderung hervorzubringen, muss man eine Arbeit $\int_0^{\varphi} i\,d\varphi$ aufwenden, welche im Felde aufgespeichert wird und in potentiellem Zustande bleibt, solange die Stromstärke den erreichten Wert i beibehält, und zurückgegeben wird, wenn die Stromstärke wieder zu Null wird. Diese im Felde aufgespeicherte potentielle Energie nennt man *innere Stromenergie*. Sie hat natürlich nur dann einen bestimmten Wert, wenn im Felde keine Hysteresis auftritt, weil sonst nicht die ganze aufgespeicherte Energie zurückgegeben wird, und nimmt einen einfachen Ausdruck an, wenn die magnetische Permeabilität, unabhängig von den Werten der magnetischen Kraft und Induktion, einen konstanten Wert μ besitzt.

In diesem Falle ist der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises konstant, und man kann daher schreiben:

$$\varphi = Li, \qquad d\varphi = Ldi,$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\varphi} i\,d\varphi = \tfrac{1}{2}Li^2. \tag{3}$$

In dem Zeitintervall, während dessen die Stromstärke zunimmt, z. B. unmittelbar nach der Schliessung des Stromkreises, setzt sich nicht die ganze von der auf den Stromkreis wirkenden E. M. K. geleistete Arbeit in Wärme um, sondern es wird ein Teil dazu verwendet, das magnetische Feld zu erzeugen. Die Stromstärke ist daher zu Anfang kleiner, als während des dann eintretenden Beharrungszustandes; oder, es addiert sich sozusagen zum normalen Strome ein entgegengerichteter Schliessungsstrom. Solange die Stromstärke konstant bleibt, ist das magnetische Feld konstant und die Arbeit in potentiellem Zustande aufgespeichert. Wenn die

Stromstärke, z. B. durch Öffnen des Stromkreises, abnimmt, so ist die geleistete Arbeit grösser, als die von der E. M. K. herrührende Arbeit, denn das magnetische Feld giebt beim Verschwinden die vorher in ihm angehäufte Energie zurück. Zu dem vorher bestehenden Strome addiert sich ein Öffnungsextrastrom, der dieselbe Richtung besitzt. Die Arbeitsleistung, welche dieser Strom hervorbringt, entspricht der vorher angesammelten Energie, die nun frei wird.

114. Mechanische Analogien. Natur des elektrischen Stromes. — Die eben betrachteten, von der Induktanz des Stromkreises herrührenden Erscheinungen sind denjenigen analog, die bei der Strömung einer Flüssigkeit durch den Einfluss der Trägheit auftreten. Will man in einem Rohr eine gewisse Flüssigkeitsmenge in Bewegung setzen, so muss man während der Zeit, in welcher die Geschwindigkeit zunimmt, nicht nur die wegen der Reibung in Wärme umgesetzte Arbeit, sondern auch diejenige, die sich in lebendige Kraft umwandelt, aufwenden. Letztere stellt uns eine verfügbare Energie dar, die zurückgegeben wird, wenn die Geschwindigkeit abnimmt; selbst nach dem Aufhören der Ursache, welche die Bewegung hervorbrachte, dauert die Bewegung der Flüssigkeit so lange fort, bis die Reibung die ganze der lebendigen Kraft entsprechende Energie aufgezehrt hat.

Die Analogie zwischen dem elektrischen Strome und der Strömung einer Flüssigkeit beschränkt sich jedoch auf die erwähnte Thatsache; es giebt aber wesentliche Verschiedenheiten zwischen beiden Arten von Erscheinungen. Im Falle der hydraulischen Strömung ist die Energie in der Masse der in dem Rohre in Bewegung befindlichen Flüssigkeit vorhanden und ganz unabhängig von den Körpern, welche das Rohr umgeben. Bei dem elektrischen Strome dagegen liegt die Energie keineswegs in dem Stromleiter, in welchem man den Strom betrachtet, sondern in dem ganzen umgebenden Raume, nämlich in dem vom Strome erzeugten magnetischen Felde, und der Wert der Energie ist um so grösser, je grösser die Permeabilität des Mediums ist. Ein elektrischer Strom hat also einen ganz anderen Charakter, als die Strömung eines Fluidums, und ist eine Erscheinung, welche ihren Sitz nicht nur im Leiter, sondern auch in dem umgebenden Felde hat; man kann sogar sagen, dass der wesentliche Teil der Erscheinungen, die den „Strom" darstellen, in dem umgebenden Medium seinen Sitz hat, weil eben im Felde die Energie vorhanden ist, während dagegen im Leiter nur ein Energieverbrauch stattfindet.

Und doch erfüllt der Leiter eine wichtige Aufgabe, er erteilt nämlich der Erscheinung eine bestimmte Richtung; von der Gestalt des Leiters hängt die Verteilung des magnetischen Feldes ab. Es wäre aber ein

Irrtum, den Strom als eine Erscheinung, welche sich nur im Leiter abspielt, als etwas, das sich im Leiter fortpflanzt, anzusehen, weil eben das wesentliche Merkmal des elektrischen Stromes in der Existenz eines magnetischen Feldes besteht, in welchem die Kraftlinien in sich selbst geschlossene, den Leiter umschlingende Linien sind.

§ 2.

Wechselströme.

115. Alternierende Grössen. Graphische Darstellung. Definitionen. — Bei vielen der praktischen Nutzanwendungen, welche bei dem heutigen Stande der Elektrotechnik sehr grosse Wichtigkeit besitzen, treten kontinuierlich und periodisch sich verändernde Ströme auf. Es sind Ströme, deren Richtung in sehr kleinen und gleichen Zeitintervallen sich umkehrt und deren Stärke fortgesetzt von einem Maximum in einer Richtung zu einem Maximum in entgegengesetzter Richtung variiert. Diese Ströme werden *Wechselströme* (alternierende Ströme) genannt.

Die Beschaffenheit der Apparate, durch welche Wechselströme erzeugt werden, bedingt es, dass die sehr kurzen Zeitintervalle zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln des Stromes einander gleich sind; ferner sind der positive und der negative Maximalwert, die der Strom annimmt, einander gleich, und schliesslich ist die in einer Richtung fliessende Elektrizitätsmenge gleich derjenigen, die in der entgegengesetzten fliesst, sodass die gesamte Elektrizitätsmenge nach einem Zeitintervall, welcher eine gerade Zahl von Wechseln einschliesst, gleich Null ist.

Man trage auf der Abscissenachse Ot (Fig. 122), in einem beliebigen Punkte anfangend, Längen proportional den Zeiten und als Ordinaten die entsprechenden Werte der Stromstärke auf, dann erhält man eine stetige Linie, welche aus vielen sich wiederholenden Teilen wie $AMBNA_1$ besteht. Die Längen AB, BA_1, ... zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten auf der Achse, d. h. zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln des Stromes, sind einander gleich; die Maximalwerte mM, nN, ... sind ebenfalls einander gleich, und ferner sind die Flächeninhalte der zwischen der Achse und jedem der Teile der Kurve eingeschlossenen Flächen AMB, BNA_1, ... auch gleich, weil sie uns das Integral $\int i dt$, d. h. die den Stromkreis zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln durchfliessende Elektrizitätsmenge, darstellen.

In einem Stromkreise, in welchem die Stromstärke wechselt, sind die E. M. KK. und die Potentialdifferenzen ebenfalls alternierende Grössen,

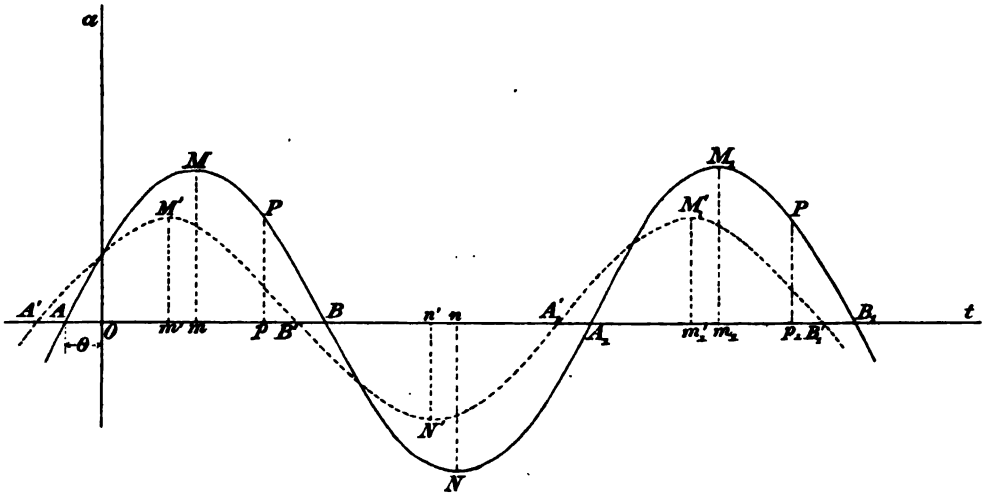

Fig. 122.

welche die eben erwähnten Eigenschaften besitzen und folglich durch ähnliche Kurven dargestellt werden können.

Wir wollen nun für eine beliebige alternierende Grösse a einige Definitionen aufstellen.

Die Zeit, während welcher die Grösse alle möglichen positiven und negativen Werte, die sie überhaupt durchlaufen kann, annimmt, und nach deren Verlauf sie eben diese Werte in derselben Reihenfolge wieder annimmt, heisst *Dauer der Periode* oder einfach *Periode.*

In der Figur ist die Periode durch die Strecken AA_1, mm_1, pp_1, ... dargestellt. Wenn man die Kurve um eine Strecke, welche gleich der Periode ist, parallel zur Achse verschiebt, so fällt die neue Kurve mit der früheren zusammen. In einer Periode hat man immer zwei Wechsel. Da die Dauer der Periode bei den in der Technik verwendeten Strömen stets ein sehr kleiner Bruchteil ($^1/_{30}$ bis $^1/_{100}$) einer Sekunde ist, so ist es bequemer, die Anzahl der vollständigen Perioden in der Sekunde anstatt der Dauer der Periode zu betrachten. Für diese Zahl wurde von dem internationalen Kongress in Paris (1889) der Name *Frequenz* adoptiert. Bezeichnet man mit T die Periode und mit n die Frequenz, so ist:

$$nT = 1, \qquad n = \frac{1}{T}.$$

Die Wechselzahl in der Zeiteinheit ist das doppelte der Periodenzahl, d. h. $= 2n$.

Betrachten wir jetzt mehrere, ohne sich zu stören, nebeneinander bestehende alternierende Grössen und die zwischen denselben sich ergebenden Beziehungen. Es soll vorausgesetzt werden, dass die verschiedenen Grössen die gleiche Periode besitzen und durch ähnliche Kurven dargestellt werden können, d. h. durch Kurven, von denen jede einfach durch Multiplikation der Ordinaten mit einem numerischen Faktor aus der anderen abgeleitet werden kann.

Es können dann alle diese Grössen, indem nur der Massstab passend geändert wird, durch eine einzige Kurve dargestellt werden.

Erreichen die verschiedenen hier betrachteten Grössen den Maximal- bezw. den Minimalwert nicht gleichzeitig, dann werden sie durch Kurven dargestellt, welche ebenfalls ähnlich, aber parallel zu der Achse gegeneinander verschoben sind. In diesem Falle dient zur Bestimmung der Lage der Kurven auf der Achse der Begriff der Phase.

Man nennt *Phase* den Bruchteil der Periode, der schon in dem Augenblicke verflossen ist, den man als Anfang der Zeit gewählt hat. Die Phase ist also ein Verhältnis zweier Zeiten, welches für eine gegebene alternierende Grösse willkürlich ist, da der Anfang der Periode, wie derjenige der Zeiten, beliebig gewählt werden kann.

Bei der in Fig. 122 dargestellten Grösse $AMBNA_1$ ist die Phase, wenn man die Zeiten von O und die Perioden von A aus zählt, durch den Quotienten $\frac{AO}{AA_1}$ gegeben.

Wenn man übereinkommt, für alle gleichzeitig betrachteten alternierenden Grössen denselben Ausgangspunkt der Zeiten anzunehmen, so ist die *Phasendifferenz* zweier beliebiger dieser Grössen vollständig bestimmt.

Die Phasendifferenz z. B. zwischen den beiden in der Figur dargestellten Grössen, von denen die eine durch die ausgezogene, die andere durch die punktierte Linie gegeben ist, ist:

$$\frac{A'O - AO}{AA_1} = \frac{A'A}{AA_1}$$

Diese Grösse ist vollständig bestimmt, weil $A'A$ von der Wahl des Ursprunges nicht abhängt.

Die Phasendifferenz zwischen zwei Grössen giebt den Bruchteil der Periode an, um welchen die eine der anderen in der Reihe der Werte, die nach und nach angenommen werden, voreilt.

Phase und Phasendifferenz sind nur dann vollständig bestimmt, wenn es sich um ähnliche Grössen handelt.

Um eine alternierende Grösse vollständig zu definieren, bedarf es ausser der Kenntnis der Periode und Phase derselben auch der Kenntnis

der ganzen Reihe der von ihr angenommenen Werte, d. h. der Form der Linie, durch welche die Grösse dargestellt wird. Unter den unendlich vielen Werten einer alternierenden Grösse verdienen die Amplitude, der mittlere und der effektive Wert besondere Beachtung.

Die *Amplitude* ist der grösste Wert, welchen die Kurve enthält; sie besitzt, wie schon erwähnt, denselben absoluten Wert in dem positiven und in dem negativen Teile der Kurve.

Der *Mittelwert* für ein gegebenes Zeitintervall ist der Durchschnitt der Werte, welche die Grösse in diesem Intervall annimmt; derselbe wird durch

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

ausgedrückt, wobei mit a der Wert der alternierenden Grösse in einem beliebigen Moment und mit t_1 und t_2 die Werte der Zeit an den Enden des betrachteten Intervalles bezeichnet werden. Der Mittelwert ist also gleich der von der Kurve und der Abscissenachse eingeschlossenen Fläche, dividiert durch die Grundlinie. Im besonderen ist der Mittelwert a_m für das Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln, d. h. der Durchschnittswert von allen positiven Werten, die die Grösse annehmen kann,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\theta}^{\frac{T}{2}-\theta} a\,dt,$$

wobei θ das Zeitintervall AO zwischen dem Anfangspunkt der Periode und dem Nullpunkt der Zeit bedeutet.

Der Mittelwert für eine ganze Periode oder für eine ganze Zahl von Perioden ist dagegen Null, weil der positive und der negative Flächeninhalt gleich sind.

Wenn man endlich den Mittelwert für eine beliebige Zeit betrachtet, so reduziert sich derselbe, da das Integral über die in der betrachteten Zeit eingeschlossenen ganzen Perioden gleich Null ist, auf den Quotienten zwischen dem auf den übrig bleibenden Bruchteil der Periode ausgedehnten Integral und der ganzen bis zu dem betrachteten Zeitpunkte verstrichenen Zeit. Das Integral im Nenner kann höchstens gleich dem Flächeninhalt eines Teiles AMB der Kurve sein, während dagegen der Zähler mit dem Wachsen der Zeit zunimmt. Deshalb kann praktisch der Mittelwert einer alternierenden Grösse, wenn er nur für ein genügend grosses Zeitintervall genommen wird, als Null angesehen werden.

Effektiver Wert einer alternierenden Grösse heisst, nach einer vom

Pariser Kongress (1889) adoptierten Benennung, die *Quadratwurzel aus dem Mittelwerte der Quadrate von allen den Werten, die die alternierende Grösse in einer ganzen Periode annimmt.* Bezeichnet $\mathscr{A}$ den effektiven Wert von a, so ist:

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a^2 dt.$$

Der effektive Wert hat dieselben Dimensionen wie die alternierende Grösse, und besitzt eine grössere Bedeutung als alle anderen betrachteten Werte, weil die effektiven Werte eben diejenigen sind, welche von den Wechselstrommessinstrumenten angegeben werden.

116. Sinoïdale alternierende Grössen. — Polare Darstellung, Summierung und Differentiation. — Es ist jener Fall bemerkenswert, in welchem die alternierende Grösse durch eine Sinuswelle dargestellt wird. Die Grösse heisst dann *sinoïdale alternierende Grösse* oder *einfach harmonische Grösse.*

Reine Sinuswellen treten zwar in der Praxis selten auf; dieser Fall ist jedoch besonders wichtig, weil er sich für eine einfache, mathematische Behandlung eignet, aus welcher sich die allgemeinen Eigentümlichkeiten der Wechselströme ergeben.

Der Wert, welchen eine sinoïdale alternierende Grösse a nach Verlauf der Zeit t (von einem bestimmten Nullpunkt aus gezählt) annimmt, wird durch den Ausdruck

$$a = A \sin \frac{2\pi}{T}(t + \theta)$$

dargestellt, worin T die Periode, θ das Zeitintervall zwischen dem Anfang der Periode und dem Nullpunkt der Zeit, daher $\frac{\theta}{T}$ die Phase, und endlich A die Amplitude (weil A eben der Maximalwert von a ist) bezeichnet.

Man kann ausserdem den Wert a als Funktion der Frequenz ausdrücken:

$$a = A \sin 2\pi n(t + \theta),$$

oder ferner, indem man $\alpha = 2\pi n\theta$ setzt:

$$a = A \sin(2\pi nt + \alpha).$$

Die einfach harmonische Grösse a ist also vollständig bestimmt, wenn deren Amplitude, Frequenz oder Periode und ferner ihre Phase gegeben sind. Um die Phase zu bestimmen, kann ebenso ihr Wert $\frac{\theta}{T}$, wie auch der Wert $\alpha = 2\pi\frac{\theta}{T}$ dienen, welch letzterer *Phasenwinkel* genannt wird.

In einer Sinuswelle ist der Mittelwert für eine halbe Periode:

$$(4) \qquad a_m = \frac{2}{T}\int_{-\theta}^{\frac{T}{2}-\theta} A \sin\frac{2\pi}{T}(t+\theta)dt = \frac{2}{\pi}A$$

nnd der effektive Wert*):

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2\frac{2\pi}{T}(t+\theta)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

d. h.

$$(5) \qquad \mathscr{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Ist ein beliebiger der drei Werte, der maximale, der mittlere, oder der effektive bekannt, so kann man leicht die anderen ermitteln.

Im Falle von Sinuswellen ist es zweckmässig, sich einer anderen graphischen Darstellungsweise, der sogenannten *polaren Darstellung* zu bedienen.

Es seien Ox und Oy (Fig. 123) zwei Orthogonalachsen; von O aus, in der Richtung, welche mit der x-Achse einen Winkel α gleich dem Phasenwinkel der darzustellenden alternierenden Grösse bildet, trage man eine Strecke OA_0 auf, deren Länge in einem bestimmten Massstabe die Amplitude A darstellt, und stelle sich vor, dass dieselbe, ihre Länge unverändert beibehaltend, um O in dem Sinne u mit der Frequenz n rotiert, d. h. auf die Weise, dass sie in der Zeit T eine Umdrehung und in einer Sekunde n Umdrehungen vollendet.

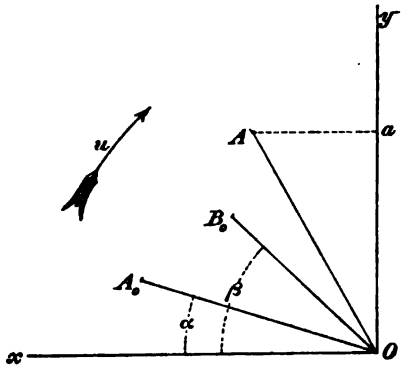

Fig. 123.

Am Ende der Zeit t, von der anfänglichen Lage OA_0 aus gezählt, wird der Vektor die Lage OA angenommen haben, welche mit OA_0 den Winkel

$$A_0OA = 2\pi nt$$

und folglich mit der x-Achse den Winkel

$$xOA = 2\pi nt + \alpha$$

bildet.

*) Wir werden allgemein den Momentan-, den Maximal- und den Effektivwert einer alternierenden Grösse bezw. durch einen kleinen Buchstaben, durch einen grossen Buchstaben in Druckschrift und durch einen grossen Buchstaben in Cursivschrift bezeichnen.

Für die Projektion Oa von OA auf die y-Achse hat man

$$Oa = OA \sin x\widehat{OA} = A \sin(2\pi nt + \alpha) = a.$$

Eine sinoïdale alternierende Grösse ist also in einem beliebigen Moment durch die auf eine feste Richtung y bezogene Projektion des Vektors dargestellt, welcher in einem bestimmten Sinne mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und mit der Frequenz n rotiert und in seiner Anfangslage mit der zu y normalen Richtung x einen Winkel gleich dem Phasenwinkel α bildet.

In analoger Weise kann eine andere Sinuswelle mit derselben Frequenz

$$b = B \sin(2\pi nt + \beta)$$

durch eine Strecke OB_0 dargestellt werden, deren Länge in dem gewählten Massstabe gleich der Amplitude B ist, und welche mit der Achse Ox einen Winkel B_0Ox gleich dem Phasenwinkel β bildet. Der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel B_0OA_0 ist gleich $\beta - \alpha$ und wird *Phasenverschiebungswinkel* zwischen den beiden Sinuswellen genannt. Da die beiden Vektoren mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotieren, bleibt dieser Winkel konstant. Bei dieser Darstellung ist die Wahl der Achsen gleichbedeutend mit der Festsetzung der Phase der alternierenden Grösse, und da diese Festsetzung willkürlich ist, so ist die Wahl der Achsen ebenfalls willkürlich, d. h. die Grösse ist durch den Vektor OA allein vollständig bestimmt. So ist auch die Phasendifferenz von zwei alternierenden Grössen vollständig bestimmt, aber stets willkürlich bleibt der Wert der Phase für *eine* beliebige dieser alternierenden Grössen; dieselbe wird daher vollständig dargestellt durch die Vektoren OA_0 und OB_0, welche einen Winkel gleich der Phasendifferenz einschliessen, ohne dass es notwendig ist, die Lage der Achsen festzusetzen.

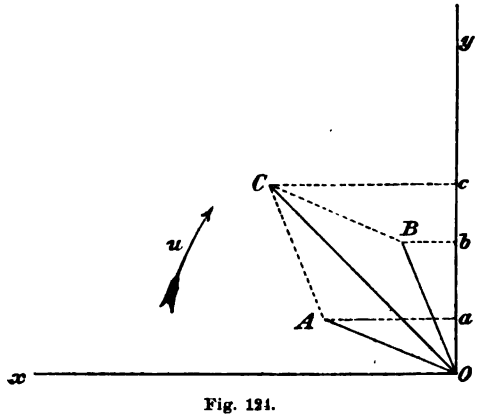

Fig. 121.

Wir nennen *Summe zweier oder mehrerer sinoïdaler alternierender Grössen* die Grösse, deren Momentanwerte die Summe der Momentanwerte der betrachteten Grössen sind.

Betrachten wir nun, wie wir diese Summenbildung bei der von uns eingeführten polaren Darstellungsweise vorzunehmen haben. In einem beliebigen Moment sind die Werte a und b zweier durch die Vektoren OA und OB dargestellter, sinoïdaler alternierender Grössen durch die Projektionen Oa und Ob der

Vektoren selbst auf die Achse Oy gegeben; in demselben Augenblicke hat die Summe beider Grössen den Wert:

$$c = a + b = Oa + Ob.$$

Betrachten wir die Diagonale OC des durch die beiden Vektoren OA und OB bestimmten Parallelogramms $OACB$; ihre Projektion Oc auf y ist:

$$Oc = Oa + ac = Oa + Ob = c$$

und giebt uns folglich den Momentanwert der Summe beider Grössen.

Nun dreht sich, weil OA und OB mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotieren, auch das mit diesen konstruierte Parallelogramm um O und behält seine Form unverändert bei; folglich hat auch die Strecke OC, deren Projektion auf y den Momentanwert der Summe giebt, konstante Länge und rotiert mit derselben Frequenz wie die beiden Vektoren OA und OB.

Wir kommen also zu dem allgemeinen Ergebnisse:

Die Summe zweier einfach harmonischer Grössen, welche die gleiche Frequenz besitzen, ist ebenfalls eine sinoïdale alternierende Grösse mit derselben Frequenz; sie wird durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, dessen Seiten die die beiden Grössen darstellenden Vektoren sind. Wir können auch mit anderen Worten sagen, dass die Summe durch den Vektor dargestellt wird, welcher die dritte Seite des Dreiecks bildet, dessen zwei andere Seiten gleich und parallel zu den Vektoren sind, welche die zu summierenden Grössen darstellen.

Und allgemein:

Die Summe mehrerer sinoïdaler alternierender Grössen mit gleicher Frequenz ist ebenfalls eine sinoïdale alternierende Grösse mit derselben Frequenz, und diese Summe wird durch den Vektor dargestellt, welcher das Polygon schliesst, dessen Seiten gleich und parallel zu den die gegebenen alternierenden Grössen darstellenden Vektoren sind. Wenn das Polygon sich schon an sich als geschlossen ergiebt, so ist die Summe gleich Null. Die Summe mehrerer sinoïdaler alternierender Grössen wird also durch die Vektorsumme der Vektoren dargestellt, welche die gegebenen Grössen darstellen. —

Der Differentialquotient nach der Zeit einer sinoïdalen alternierenden Grösse

$$a = A \sin(2\pi n t + \alpha)$$

ist:

$$a' = \frac{da}{dt} = 2\pi n A \cos(2\pi n t + \alpha)$$

oder:

$$a' = \frac{da}{dt} = 2\pi n A \sin\left(2\pi n t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

und kann auch auf die Form:

$$a' = A' \sin(2\pi nt + \alpha')$$

gebracht werden, worin:

$$A' = 2\pi nA \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

gesetzt ist.

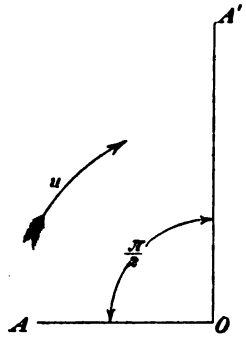

Fig. 125.

Der Differentialquotient einer sinoïdalen alternierenden Grösse ist ebenfalls eine Grösse derselben Natur, deren Amplitude gleich der Amplitude der gegebenen Grösse multipliziert mit $2\pi n$ ist, und welche der gegebenen Grösse um 90° in der Phase voreilt. Wenn OA (Fig. 125) die Grösse a darstellt, so ist deren Differentialquotient a' durch den Vektor OA' dargestellt, dessen Länge $2\pi n \cdot \overline{OA}$ ist, und welcher mit OA einen Winkel von 90° bildet, wobei man, von OA ausgehend, die Winkel in dem Sinne der Drehung u als positiv annimmt.

117. Sinoïdale Wechselströme in Stromkreisen mit Ohm'schem und induktivem Widerstand. — Nach den vorstehenden allgemeinen Betrachtungen über die alternierenden Grössen können wir nunmehr zu dem Studium der Wechselströme übergehen, für welche wir die Form einer Sinuswelle voraussetzen.

1. *Geschlossener Stromkreis.* — Betrachten wir zuerst einen vollständigen Stromkreis mit dem Widerstand r und der Induktanz L, und nehmen wir der Einfachheit halber an, dass letztere als konstant angesehen werden könne. Gesucht ist der Wert e der E. M. K., welche in dem Stromkreise herrschen muss, um in demselben einen Wechselstrom von der Stärke:

$$i = I \sin(2\pi nt + \alpha)$$

hervorzubringen.

Das Ohm'sche Gesetz, auf den Stromkreis angewandt, giebt uns für einen beliebigen Moment die Beziehung:

$$e - \frac{d\varphi}{dt} = ri,$$

oder, da L konstant ist:

$$e - L\frac{di}{dt} = ri,$$

$$e = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Die E. M. K. ist also die Summe der beiden alternierenden Grössen ri und $L\frac{di}{dt}$.

Indem wir beachten, dass r und L konstante Faktoren sind, und an die polare Darstellung einer einfach harmonischen Grösse und ihres Differentialquotienten uns erinnern, erhalten wir sogleich die Grösse ri dargestellt durch den in einer willkürlichen Richtung gezogenen Vektor von der Länge $OA = rI$ (Fig. 126) und die Grösse $L\frac{di}{dt}$ dargestellt durch den Vektor OB, welcher senkrecht zu OA steht, diesem um 90° voreilt und die Länge $OB = 2\pi nLI$ besitzt. Der aus OA und OB resultierende Vektor OC stellt die E. M. K. e dar; die Länge OC giebt uns nämlich die Amplitude E, und der Winkel $\varphi = \widehat{COA}$, welchen derselbe mit dem Vektor OA bildet, die Phasenvoreilung, die er gegen die Stromstärke aufweist. Die E. M. K. ist also durch:

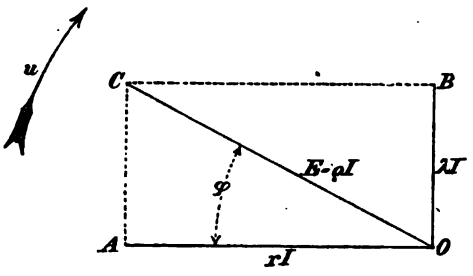

Fig. 126.

$$e = E\sin(2\pi nt + \alpha + \varphi)$$

ausgedrückt.

Aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks OAC folgt:

$$E^2 = r^2I^2 + (2\pi nL)^2I^2,$$

und daher ist, wenn man

$$\lambda = 2\pi nL \quad \text{und} \quad \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2} \tag{6}$$

setzt:

$$E = \varrho I. \tag{7}$$

Aus der Formel (5) ergiebt sich, dass die Gleichung (7) ihre Giltigkeit behält, wenn die Maximalwerte E und I durch die effektiven Werte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J}$ ersetzt werden.

Indem wir annehmen, dass L konstant sei, haben wir auch die Grösse ϱ als konstant zu betrachten. Folglich kann man sagen, dass eine Proportionalitätsbeziehung zwischen den Amplituden und mithin auch zwischen den effektiven Werten der E. M. K. und der Stromstärke in einem von Wechselstrom durchflossenen Stromkreise besteht, d. h. eine Beziehung analog derjenigen, welche das Ohm'sche Gesetz für die Gleichströme ausdrückt.

Den Faktor ϱ, welcher dem Widerstand entspricht, nennt man *scheinbaren Widerstand* oder *Impedanz des Stromkreises*; derselbe ist ab-

hängig von dem wirklichen Widerstand r (der auch reeller oder metallischer oder namentlich Ohm'scher Widerstand genannt wird) und von der Grösse λ, welche ihrerseits von der Induktanz abhängt und *induktiver Widerstand* oder *Reaktanz* genannt wird*).

Wenn der Ohm'sche Widerstand r und der induktive λ gegeben sind, so kann man die Impedanz durch die oben abgeleiteten Beziehungen leicht ermitteln.

Aus der graphischen Darstellung der E. M. K. e kann man ersehen, dass die Katheten OA und OC durch eine einfache Massstabsänderung die Grössen r und λ darstellen können; dann ist der scheinbare Widerstand ϱ durch die Hypotenuse OC dargestellt. Für einen bestimmten Wert des Ohm'schen Widerstandes ist der Wert des scheinbaren Widerstandes um so grösser, je grösser der Wert der Induktanz in dem Stromkreise ist; nur wenn $L = 0$ ist, ist $\varrho = r$, aber im allgemeinen ist $\varrho > r$, und ihre Differenz kann sogar sehr erheblich sein, wenn die Induktanz gross ist.

Aus der graphischen Darstellung ergiebt sich sofort auch der Wert der Phasendifferenz zwischen e und i. Das rechtwinklige Dreieck OAC, dessen Winkel $\widehat{AOC}$ gleich φ ist, giebt

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\lambda}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{\varrho}, \quad \cos\varphi = \frac{r}{\varrho}.$$

Für einen gegebenen endlichen Wert des Widerstandes r ist der Phasenverschiebungswinkel φ gleich Null, wenn die Induktanz des Stromkreises gleich Null ist; ist L nicht Null, so hat φ einen bestimmten

*) Hier wird, wie üblich bei der theoretischen Behandlung dieses Gegenstandes, der Selbstinduktionskoeffizient als unabhängig von der Stromstärke vorausgesetzt und angenommen, dass der Joule'sche Effekt die ganze in Wärme umgesetzte Energiemenge darstelle, was allgemein nicht zutreffend ist. Die Permeabilität des Mediums hängt von dem Sättigungsgrade ab und mithin die Induktanz von der Stromstärke; auch ausserhalb des Leiters findet eine von uns als Energieverlust aufzufassende und hauptsächlich von der molekularen Reibung (magnetischen und dielektrischen Hysteresis), von den Foucaultströmen und von den induzierten Strömen in benachbarten Stromkreisen bedingte Umsetzung von Energie in Wärme statt.

Wir können aber in jedem Falle die Formel $E = I\sqrt{r^2 + \lambda^2}$ als giltig betrachten, wenn wir den Grössen r und λ eine allgemeinere Bedeutung beilegen, wenn wir nämlich unter dem Widerstand r nicht mehr den *wahren*, mit Gleichstrom gemessenen Ohm'schen Widerstand, sondern einen fiktiven, sich auf den gesamten Energieverbrauch beziehenden und durch die Formel $r = \frac{W}{i^2}$ bestimmten Widerstand verstehen (wobei W die gesamte in Wärme umgesetzte Energie bedeutet) und die Reaktanz λ als durch die Formel $E = I\sqrt{r^2 + \lambda^2}$ selbst definiert annehmen. Der Widerstand und die Reaktanz sind dann keine Konstanten des Stromkreises mehr. Diese Bemerkung gilt, sinngemäss angewandt, auch für das Folgende.

Wert, welcher mit dem Zunehmen von L wächst und dem Werte $\frac{\pi}{2}$ zustrebt, wenn L im Vergleich mit r unendlich gross wird; man sagt dann, dass beide Grössen in *Quadratur* zu einander stehen, die eine geht durch ihren Maximalwert hindurch, wenn die andere Null wird.

Für einen gegebenen Wert der Induktanz L ändert sich der Winkel φ mit dem Variieren des Ohm'schen Widerstandes des Stromkreises. Der Grenzwert für $r = 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$; wenn r zunimmt, nimmt φ ab und strebt dem Werte Null zu, wenn r sehr gross wird. Man hat also zwei Grenzwerte für den Winkel φ; den Wert Null, wenn λ und folglich L im Vergleich zu r verschwindend klein sind, und den Wert $\frac{\pi}{2}$, wenn λ und L sehr gross gegen r sind. Im allgemeinen liegt der Wert von φ zwischen diesen extremen Werten.

2. *Teil eines Stromkreises.* — In einem Teile eines Stromkreises mit dem Widerstand r herrsche keine andere E.M.K. als diejenige, welche von der als konstant angesehenen Induktanz L herrührt. Wir wollen den Spannungsabfall, d. h. die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten des Teiles bestimmen, welche entsteht, wenn ein gewisser Wechselstrom den Stromkreis durchfliesst. — Das Ohm'sche Gesetz liefert uns für eine beliebige Zeit t die Beziehung:

$$v = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Durch ähnliche Konstruktion, wie im vorigen Falle, finden wir den Vektor, welcher v darstellt, und wir können hier die damals angestellten allgemeinen Betrachtungen wiederholen.

Auch hier besteht zwischen den Amplituden und den effektiven Werten der Potentialdifferenz und der Stromstärke ein dem Ohm'schen ähnliches Gesetz:

$$V = \varrho I. \tag{7'}$$

Die Konstante ϱ ist der scheinbare Widerstand des betrachteten Teiles des Stromkreises und steht mit dem Ohm'schen Widerstand r und dem induktiven $\lambda = 2\pi n L$ in demselben Zusammenhang wie vorher:

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2}.$$

Die Potentialdifferenz besitzt eine Phasenvoreilung gegen die Stromstärke, deren Winkel durch die Formel (8) als eine Funktion von L und r gegeben wird.

3. *Verzweigte Stromkreise.* — Die oben ermittelten Beziehungen gestatten uns, das Problem der Stromverzweigung auch für den Fall der Wechselströme zu behandeln. Für die praktischen Anwendungen ist es nicht nötig, die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen; wir werden folglich nur den einfachen Fall betrachten, in welchem die Stromzweige Widerstand und Induktanz, aber keine merkliche gegenseitige Induktion aufweisen. Zwischen den Punkten A und B (Fig. 127) des Stromkreises seien die Zweige 1 und 2, welche bezw. die Ohm'schen Widerstände r_1 und r_2, die von den Induktanzen L_1 und L_2 herrührenden induktiven Widerstände λ_1 und λ_2 und die scheinbaren Widerstände ϱ_1 und ϱ_2 besitzen. Bezeichnen wir mit i die Stromstärke in dem unverzweigten Teile des Stromkreises, mit i_1 bezw. i_2 die Stärke der Zweigströme, mit v_a, v_b, $v = v_a - v_b$ bezw. die Werte des Potentials in A und B und der Potentialdifferenz zwischen A und B.

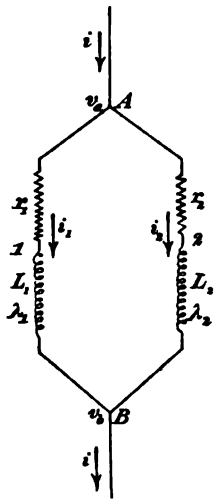

Fig. 127

Die Beziehung (7'), auf die beiden Zweige angewandt, giebt:

$$V = \varrho_1 I_1 = \varrho_2 I_2,$$

woraus folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

d. h:

Die maximalen und folglich auch die effektiven Werte der Stromstärke in den Zweigen verhalten sich umgekehrt wie die scheinbaren Widerstände der betreffenden Stromzweige.

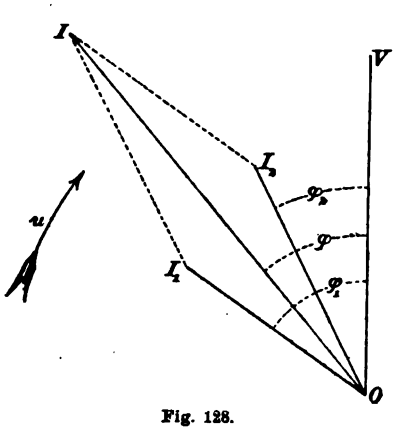

Fig. 128.

Indem wir die Annahme machen, dass in den Zweigen nur Ohm'scher und induktiver Widerstand vorhanden sein soll, giebt uns das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität oder, wenn wir wollen, der auf den Punkt A angewandte erste Kirchhoff'sche Satz:

$$i = i_1 + i_2.$$

Wenn der Vektor OV (Fig. 128), welcher die Potentialdifferenz v darstellt, bekannt ist, kann man durch die beschriebenen Konstruktionen die

Vektoren OI_1 und OI_2 ermitteln, welche die Zweigströme i_1 und i_2 darstellen; ihre Summe OI bildet die polare Darstellung des Hauptstromes i.

Wir können den algebraischen Ausdruck von i leicht finden. Bezeichnen φ_1, φ_2 und φ die Phasendifferenzen zwischen V und I_1 bezw. I_2 und I, so gilt:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 \\ I\sin\varphi = I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

und durch Quadrierung und Summierung ergiebt sich:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Jeder der Winkel φ_1 und φ_2 liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, auch $\varphi_1 - \varphi_2$ ist $< \frac{\pi}{2}$, und folglich ist die Resultierende I immer grösser als jede einzelne der Komponenten I_1 und I_2. Man kann auch die Phasendifferenzen leicht berechnen. Durch Division der Gleichungen (α) Glied für Glied findet man die Beziehung:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2},$$

welche uns die Phasendifferenz φ zwischen der Potentialdifferenz V und dem Hauptstrome I angiebt.

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Zweigströmen ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_2}{1 + \operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2}$$

gegeben.

Man hat nun nur die aus den Gleichungen (7') und (8) sich ergebenden Werte für I_1, I_2, φ_1 und φ_2 in diese Ausdrücke einzusetzen, um die verschiedenen Grössen als Funktionen der Potentialdifferenz v, der Ohmschen, induktiven und scheinbaren Widerstände, welche die Stromkreise definieren, zu ermitteln. Wenn man I in Funktion von V ausgedrückt hat, so giebt der Quotient $\frac{V}{I} = \varrho$ den gesamten scheinbaren Widerstand der beiden Zweige.

118. Einfluss der Kapazität in Wechselstromkreisen. — Veränderliche Ströme können auch in nicht vollständig geschlossenen Stromkreisen erzeugt werden, d. h. in Stromkreisen, welche nicht vollständig aus Leitern bestehen, sondern sich durch dielektrische Körper schliessen. In der That kann zwischen den beiden Enden des Stromkreises ein Verschiebungsstrom

stattfinden, analog demjenigen, der im Dielektrikum eines Kondensators auftritt. Wenn die Belegungen eines Kondensators in Verbindung mit den Polen eines Elementes gebracht werden, findet im Dielektrikum eine elektrische Verschiebung statt, durch deren Einfluss der Kondensator sich auf eine Potentialdifferenz, welche der E. M. K. des Elementes gleich ist, ladet; dann hört jede Elektrizitätsströmung auf, weil Gleichgewicht zwischen der den Strom hervorbringenden E. M. K. und den Gegenwirkungen des Dielektrikums hergestellt ist. Besitzt dagegen die E. M. K. keinen konstanten Wert, sondern handelt es sich um eine alternierende Spannung, so entladet sich der Kondensator, nachdem er sich geladen hat, und ladet sich in entgegengesetztem Sinne u. s. w., d. h. es findet im Dielektrikum eine alternierende Verschiebung statt.

Im allgemeinen bilden die Enden eines unterbrochenen Stromkreises, ganz einerlei, wie sie beschaffen sind, die beiden Belegungen eines Kondensators, dessen Kapazität von den Dimensionen der Enden selbst und von der Dicke und Natur des dazwischenliegenden Dielektrikums abhängt.

Suchen wir die Wirkung eines Kondensators in einem Wechselstromkreise festzustellen, und betrachten wir dabei einen beliebigen Stromkreis, in welchen ein Kondensator mit der Kapazität C eingeschaltet ist. Bezeichnen wir mit i den Momentanwert des Wechselstromes, dessen positive Richtung die vom Pfeile angedeutete (Fig. 129) sein soll, mit v_1 und v_2 die Momentanwerte des Potentials auf den Belegungen und ferner mit $v = v_1 - v_2$ die Potentialdifferenz zwischen denselben in dem betrachteten Moment.

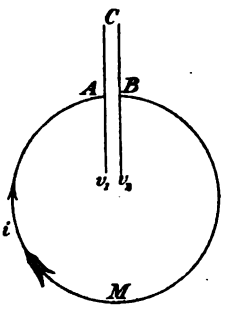

Fig. 129.

Da i die Stromstärke in dem Leiter BMA ist, so geht in der unendlich kurzen Zeit dt durch jeden Querschnitt des Leiters eine Elektrizitätsmenge $i\,dt$, welche auch auf die Belegung A gelangt, d. h. die Ladung des Kondensators nimmt in der Zeit dt um $i\,dt$ zu. Es kann nun aber die Zunahme der Ladung des Kondensators auch durch das Produkt $C\,dv$ ausgedrückt werden, wobei dv die Zunahme der Potentialdifferenz zwischen den Belegungen in der Zeit dt bezeichnet. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke für dieselbe Ladung erhält man:

$$i\,dt = C\,dv,$$

woraus folgt:

$$i = C\frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Die Intensität des Wechselstromes in einem Stromkreise, welcher einen Kondensator enthält, wird durch das Produkt der Kapazität des Konden-

sators mit dem nach der Zeit gebildeten Differentialquotienten der Potentialdifferenz zwischen den Belegungen dargestellt.

Variiert die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen nach der Gleichung:

$$v = V \sin(2\pi n t + \alpha),$$

so ist i ebenfalls eine einfach harmonische Grösse mit der Amplitude:

$$I = 2\pi n C V,$$

und weist gegen die Potentialdifferenz eine Phasenvoreilung von $\frac{\pi}{2}$ auf.

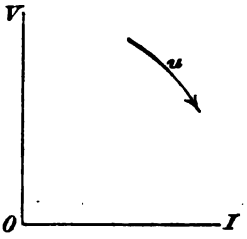

Fig. 130.

Wenn der die Potentialdifferenz v darstellende Vektor OV (Fig. 130) gegeben ist, so kann sofort der Vektor, welcher i darstellt, ermittelt werden, indem man eine Strecke OI von der Länge $2\pi n C \cdot OV$ zieht, welche dem Vektor OV um 90^0 voreilt. Durch die umgekehrte Konstruktion wird man, wenn der i darstellende Vektor gegeben ist, den Vektor finden können, welcher die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators angiebt.

119. Wechselstromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität. — In einem Wechselstromkreise seien die Grössen gegeben, welche den Stromkreis definieren, namentlich die Werte des Widerstandes r, der Induktanz L und der Kapazität C; es soll nun die E. M. K. bestimmt werden, welche im Stromkreise wirken muss, um einen Strom von gegebener Stärke durch denselben fliessen zu lassen.

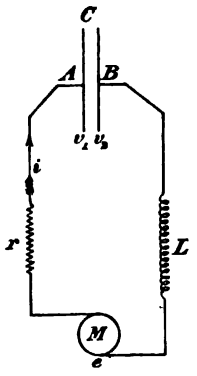

Fig. 131.

Bezeichnen wir mit i, e, v_1, v_2 die Momentanwerte der Stromstärke, bezw. der E. M. K. und der Potentiale auf den Belegungen A und B des Kondensators (Fig. 131), und sehen wir als positive Richtung des Stromes diejenige an, welche von dem Pfeile i angedeutet wird.

Das Ohm'sche Gesetz, für den Leiter $BLMrA$ angewandt, giebt uns:

$$v_2 - v_1 + e - L\frac{di}{dt} = ri,$$

woraus sich, indem man $v_1 - v_2 = v$ setzt, ergiebt:

$$e = ri + L\frac{di}{dt} + v.$$

Wenn der Vektor OA (Fig. 132) von der Länge $OA = rI$ den Wert ri darstellt, so stellt der demselben um 90° voreilende Vektor von der Länge $OB = 2\pi nLI$ den Wert $L\frac{di}{dt}$ und der entgegengerichtete Vektor OC von der Länge $OC = \frac{I}{2\pi nC}$ den Wert v dar.

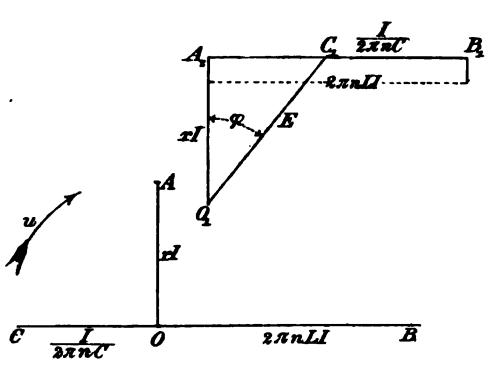

Fig. 132.

Setzt man diese drei Vektoren mittels der Polygonallinie $O_1A_1B_1C_1$ zusammen, so giebt die Seite O_1C_1, welche das Polygon schliesst, die E. M. K. e an, die wir finden wollten; die Länge O_1C_1 giebt die Amplitude E, der Winkel $A_1O_1C_1$ die Phasendifferenz zwischen e und i an.

Die analytischen Ausdrücke von E und φ lassen sich leicht ermitteln. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $O_1A_1C_1$ ergiebt sich:

$$\overline{O_1C_1}^2 = \overline{O_1A_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = \overline{O_1A_1}^2 + (A_1B_1 - B_1C_1)^2.$$

Nun ist:

$$O_1C_1 = E, \qquad O_1A_1 = rI,$$
$$A_1B_1 = 2\pi nLI, \qquad B_1C_1 = \frac{I}{2\pi nC},$$

und folglich:

$$E^2 = r^2I^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2 I^2.$$

Wenn man ferner

$$(10) \qquad \begin{cases} 2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC} = A \\ \sqrt{r^2 + A^2} = \mathsf{P} \end{cases}$$

setzt, so kann man auch schreiben:

$$(11) \qquad E = \mathsf{P}I.$$

Dieselbe Beziehung, die hier für die Maximalwerte ermittelt worden ist, gilt auch für die effektiven Werte. Bei der Annahme, dass L einen konstanten Wert habe, ist P ebenfalls eine Konstante; folglich besteht auch in diesem allgemeinen Falle eine dem Ohm'schen Gesetze analoge Beziehung zwischen den maximalen oder den effektiven Werten der E. M. K. und der Stromstärke. Dem konstanten Faktor P, welcher die Stelle des Widerstandes in dem Ohm'schen Gesetze einnimmt, giebt

man auch den Namen *Impedanz* oder *scheinbaren Widerstand* des Stromkreises; derselbe hängt nicht nur von dem Ohm'schen Widerstande, sondern auch von der Induktanz und der Kapazität ab. Die Grösse A nennt man *Reaktanz* des Stromkreises. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $O_1A_1C_1$ kann man auch den Wert von φ ermitteln:

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{A}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{A}{P}, \quad \cos\varphi = \frac{r}{P}.$$

Aus der Vergleichung der Formeln (10) und (12) mit den Formeln (6) und (8) ergiebt sich klar, welchen Einfluss die Grösse der Kapazität hat. In dem Ausdrucke der Reaktanz tritt wegen des Vorhandenseins der Kapazität ein Posten $\frac{1}{2\pi nC}$ auf, welcher entgegengesetztes Vorzeichen, wie der von der Induktanz herrührende Posten $2\pi nL$ besitzt. Das Vorhandensein sowohl der Induktanz als auch der Kapazität bewirkt in dem Stromkreise das Auftreten einer Reaktanz; während aber die Induktanz eine Phasenverzögerung der Stromstärke gegen die E. M. K. verursacht, bringt die Kapazität eine Phasenvoreilung hervor und setzt sich folglich der Wirkung der Induktanz entgegen.

Die Reaktanz A eines Stromkreises fällt mit dem induktiven Widerstande λ nur dann zusammen, wenn C unendlich gross wird, d. h. wenn man im Kondensator eine stetige Verschiebung durch eine endliche Potentialdifferenz hervorrufen kann; dies ist der Fall bei einem metallisch geschlossenen Stromkreise.

Je nach den Werten der Kapazität und der Induktanz können drei verschiedene Fälle auftreten.

I. Es sei $\frac{1}{2\pi nC} < 2\pi nL$, d. h. $B_1C_1 < A_1B_1$ (Fig. 132); der Punkt C_1 fällt rechts von A_1 zwischen A_1 und B_1. In diesem Falle, welcher in der Praxis am häufigsten vorkommt, hat man im Stromkreise eine E. M. K., welche immer noch der Stromstärke in der Phase voreilt; aber der Wert dieser Phasendifferenz und folglich auch der Wert der E. M. K. ist kleiner als derjenige, der dann auftreten würde, wenn keine Kondensatoren im Stromkreise vorhanden wären. Die nämlichen Werte der E. M. K. und Phasendifferenz könnten also in einem Stromkreise ohne Kapazität bei demselben Ohm'schen Widerstand, aber kleinerer Induktanz erzielt werden.

II. Es sei $\frac{1}{2\pi nC} > 2\pi nL$, d. h. $B_1C_1 > A_1B_1$ (Fig. 133); dann fällt

der Punkt C_1 links von A_1. In diesem Falle ist die Reaktanz A negativ, foglich ist auch der Winkel φ negativ, und die Werte der E. M. K. eilen denen der Stromstärke nicht vor, sondern bleiben dagegen zurück; die Wirkung der Kapazität überwiegt diejenige der Induktanz.

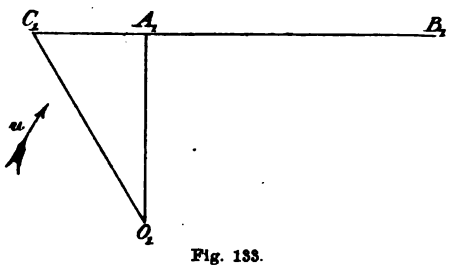

Fig. 133.

Die Phasenverzögerung von e gegen i wächst mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2\pi n C}$, d. h. mit dem Abnehmen des Wertes der Kapazität.

In einem Wechselstromkreise kann man also durch Veränderung der Induktanz und der Kapazität die Phasendifferenz zwischen der E. M. K. und der Stromstärke ganz beliebig zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ sich ändern lassen; man hat eine Phasenvoreilung von e gegen i, deren Wert nahezu $\frac{\pi}{2}$ beträgt, wenn die Induktanz sehr gross ist, und dagegen eine Phasenverzögerung, deren Wert nahezu $\frac{\pi}{2}$ beträgt, wenn die Kapazität sehr klein ist.

III. Es erübrigt noch, den dazwischenliegenden Fall zu betrachten, in welchem

$$\frac{1}{2\pi n C} = 2\pi n L \quad \text{oder} \quad 4\pi^2 n^2 L C = 1 \tag{13}$$

ist.

Der Punkt C_1 (Fig. 134) fällt dann mit A_1 zusammen, weil $B_1 C_1 = A_1 B_1$. In diesem Falle ist $\varphi = 0$ und $\mathsf{P} = r$, d. h. es ist keine Phasendifferenz zwischen der E. M. K. und der Stromstärke vorhanden; der scheinbare Widerstand hat den kleinsten möglichen Wert, d. h. die Stromstärke hat bei einer gegebenen E. M. K. den grössten Wert, oder die E. M. K. ist bei einem gegebenen Werte der Stromstärke am kleinsten. Dieselbe Wirkung würde man in einem Stromkreise mit demselben Ohm'schen Widerstand, aber ohne Reaktanz haben; die Wirkungen der Induktanz und der Kapazität heben sich gegenseitig auf. In einem Wechselstromkreise, ganz einerlei, wie gross die Werte von L und C sind, wird man immer die eben betrachteten

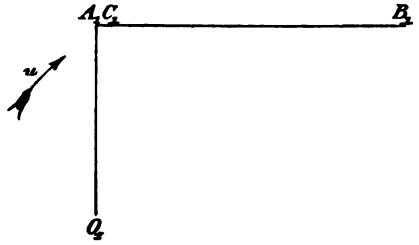

Fig. 134.

Erscheinungen beobachten können, wenn nur die Frequenz des Stromes eine solche ist, dass sie der Gleichung (13) genügt, d. h. wenn

$$(14) \qquad \begin{cases} n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} \\ T = 2\pi\sqrt{LC}. \end{cases}$$

120. Elektrische Resonatoren. — Ein Stromkreis, welcher einen sehr kleinen Widerstand besitzt und der Gleichung (13) genügt, kann von einem Strome mit erheblicher Stärke durchflossen werden, auch wenn die auf ihn wirkende E. M. K. klein ist.

Betrachten wir den Grenzfall, in welchem der Ohm'sche Widerstand gleich Null ist; dann ist $Ir = 0$, und $L\frac{di}{dt}$ und v sind entgegengesetzt gleich. In der im vorigen Abschnitte behandelten Konstruktion des Vektors O_1C_1, welcher die E. M. K. darstellt, fallen die Punkte O_1, A_1 und C_1 zusammen, während $O_1B_1 = B_1C_1$ einen gewissen von Null verschiedenen Wert besitzt. Es folgt daraus, dass, obwohl keine E. M. K. im Stromkreise vorhanden ist, weder die Potentialdifferenz V noch die Stromstärke I Null sind.

Dieses Ergebnis, welches auf den ersten Blick paradox erscheint, genügt dagegen den Forderungen des Prinzips von der Erhaltung der Energie vollständig. In dem betrachteten Stromkreise findet eine stetige und periodische Umwandlung von magnetischer in elektrische Energie statt, und umgekehrt, eine Umwandlung, welche, da der Widerstand Null ist, ohne Energievergeudung vor sich gehen kann.

Die Mechanik bietet Beispiele solcher Transformationen. Wenn beispielsweise ein Pendel im Felde der Schwere schwingt, ohne dass sich ein passiver Widerstand seiner Bewegung entgegensetzt, so findet eine kontinuierliche Umsetzung von potentieller Energie in kinetische Energie und umgekehrt statt, derart, dass das Pendel in der höchsten Lage, welche der grössten Abweichung von der Mittellage entspricht, nur potentielle, in der tiefsten oder Mittellage nur kinetische Energie besitzt.

In ähnlicher Weise ist ein vollkommen elastischer Körper, in welchem eine erste Deformation erzeugt wird, fortdauernd entgegengesetzt gleichen Deformationen periodisch unterworfen; man hat auch hier eine kontinuierliche Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt.

Ganz analog ist die eben betrachtete elektrische Erscheinung. Hat man dem Kondensator eine Ladung erteilt, so ist eine gewisse elektrische potentielle Energie in demselben aufgespeichert; die Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen bringt im Stromkreise einen Strom und folglich eine magnetische Energie hervor, infolge dessen entgegengesetzte

E. M. KK. entstehen, welche veranlassen, dass der Kondensator auf eine der vorigen entgegengesetzten Potentialdifferenz geladen wird. Dieselben Erscheinungen wiederholen sich darauf in umgekehrtem Sinne, und dieser Wechsel setzt sich periodisch weiter fort. Man hat also eine fortgesetzte Umsetzung von elektrischer in magnetische Energie, bei welcher unter der Annahme, dass $r = 0$, die Energievergeudung gleich Null ist. Ist die elektrische potentielle Energie am grössten, d. h. ist die Potentialdifferenz v ein Maximum, dann ist die Stromstärke i, welche, wie gesagt, in Quadratur mit v ist, gleich Null, und folglich ist auch die magnetische Energie gleich Null; umgekehrt ist die magnetische Energie ein Maximum und die elektrische gleich Null, wenn i ein Maximum und v gleich Null ist.

Da die Transformation einer Energieform in die andere vollständig ist, so müssen die Werte der beiden Arten der Energie einander gleich sein.

Die gesamte magnetische Energie ist (3):

$$\frac{1}{2} LI^2,$$

die gesamte elektrische Energie ist (8′) [41]:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

worin q die Gesamtladung des Kondensators, d. h. die gesamte Elektrizitätsmenge, die in einer Viertelperiode den Stromkreis durchfliesst, bedeutet. Setzen wir die Phase von i gleich Null voraus, setzen wir nämlich:

$$i = I \sin 2\pi n t,$$

so ist:

$$q = \int_0^{\frac{T}{4}} i\,dt = I \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\pi n t\,dt = \frac{I}{2\pi n}.$$

Die gesamte elektrische Energie ist also:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{I^2}{4\pi^2 n^2 C}.$$

Indem man die Werte der magnetischen und der elektrischen Energie einander gleich setzt, erhält man:

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2}{4\pi^2 n^2 C},$$

d. h.:

$$4\pi^2 n^2 LC = 1.$$

Man gelangt somit wieder zu der bei Beginn des Studiums der Erscheinung vorausgesetzten Bedingungsgleichung (13).

Es genügt also, in dem betrachteten System einmal einen Wechselstrom mit der Frequenz n zu erzeugen, damit derselbe unendlich lange

fortbestehe. Praktisch kann man ein solches System nicht herstellen, da es unmöglich ist, den Widerstand des Stromkreises zu Null zu machen; wir können aber immer Stromkreise unter Bedingungen betrachten, die den hier angenommenen sehr nahe kommen, wenn der Widerstand klein und die Beziehung (13) erfüllt ist.

Lassen wir auf einen solchen Stromkreis auf irgend welche Weise in rhythmischer Folge periodische, wenn auch sehr kleine E. M. KK. mit derselben Frequenz wirken, so addieren sich die Wirkungen dieser E. M. KK., ebenso wie bei einem Pendel sich die Impulse addieren, welche in demselben Rhythmus, mit welchem das Pendel schwingt, gegeben werden, und wie die Schwingungen einer vibrierenden Saite durch Schwingungen von Saiten vergrössert werden, welche mit derselben in Einklang schwingen. Wegen der Analogie mit dem entsprechenden Vorgang in der Akustik nennt man einen Stromkreis, welcher den angegebenen Bedingungen genügt, einen *elektrischen Resonator*.

In einem Resonator addieren sich die Schwingungen, die einen bestimmten Rhythmus besitzen, und können Schwingungen von grösserer Amplitude hervorbringen; ist einmal in einem Resonator eine gewisse Schwingung erzeugt worden, so setzt dieselbe sich von selbst fort, ohne dass E. M. KK. weiter wirken müssen, und würde unendlich lange fortdauern, wenn man den theoretischen Fall eines Resonators verwirklichen könnte, welcher keinen Ohm'schen Widerstand besässe.

Die Formeln (14) bestimmen für jeden Resonator die Frequenz und die Periode der Schwingungen, bei welchen er resonieren kann. Durch Änderung der Induktanz und der Kapazität des Stromkreises kann man die Frequenz und die Periode nach Belieben variieren. Je kleiner die Induktanz und die Kapazität sind, desto kleiner ist die Periode und desto grösser die Frequenz.

121. Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Wechselstromkreises. — In einen Teile AB des Stromkreises (Fig. 135) sei ein Kon-

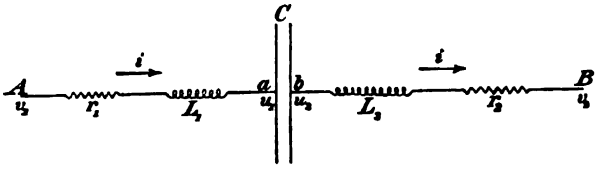

Fig. 135.

densator von der Kapazität C eingeschaltet. Bezeichnen wir bezw. mit r_1, L_1, r_2, L_2 den Ohm'schen Widerstand und die Induktanz der Strecken Aa und bB. In dem Teile AB des Stromkreises herrsche keine andere E. M. K.

als diejenige der Selbstinduktion; in dem übrigen Teile wirke eine E. M. K. mit der Frequenz n. Nehmen wir als positive Richtung des Stromes diejenige des Pfeiles an, und bezeichnen wir mit i die in einem bestimmten Zeitpunkte vorhandene Stromstärke, mit v_1 und v_2 die Werte des Potentials an den Enden A und B, mit u_1 und u_2 die Werte desselben an den Belegungen des Kondensators, alle Werte auf denselben Zeitpunkt bezogen.

Als gegeben vorausgesetzt wird die Stromstärke, gesucht wird die Potentialdifferenz zwischen den Enden A und B.

Das Ohm'sche Gesetz, auf die beiden Teile Aa und bB des Stromkreises angewandt, giebt:

$$v_1 - u_1 - L_1 \frac{di}{dt} = r_1 i$$

$$u_2 - v_2 - L_2 \frac{di}{dt} = r_2 i.$$

Summiert man Glied für Glied und setzt man $v_1 - v_2 = v$, $u_1 - u_2 = u$, $r_1 + r_2 = r$, $L_1 + L_2 = L$, so erhält man:

$$v - u - L \frac{di}{dt} = ri,$$

woraus folgt:

$$v = ri + L \frac{di}{dt} + u.$$

Diese Gleichung ist ganz analog derjenigen, welche die E. M. K. eines Stromkreises als Funktion der Stromstärke angiebt [119]; folglich kann v in analoger Weise wie e durch eine entsprechende Konstruktion ermittelt werden.

Indem man auch in diesem Falle

$$(10') \qquad \begin{cases} A = 2\pi n L - \frac{1}{2\pi n C} \\ \mathsf{P} = \sqrt{r^2 + A^2} \end{cases}$$

setzt, hat man:

$$(11') \qquad V = \mathsf{P} I.$$

P heisst wieder *scheinbarer Widerstand* oder *Impedanz* und A *Reaktanz* des betrachteten Teiles des Stromkreises.

Dieselben Gleichungen (12) bestimmen die Phasendifferenz zwischen der Potentialdifferenz V und der Stromstärke I.

Wir können hier dieselben Erwägungen wiederholen, die wir für den Fall eines vollständigen Stromkreises gemacht haben; die Kapazität und und die Induktanz bringen entgegengesetzte Wirkungen hervor, die erste bewirkt eine Phasenvoreilung, die zweite eine Phasenverzögerung der Werte der Stromstärke in bezug auf die Werte der Potentialdifferenz.

Wenn $\frac{1}{2\pi n C} < 2\pi n L$ ist, überwiegt der Einfluss der Induktanz, und v eilt in der Phase der Stromstärke vor.

Wenn dagegen $\frac{1}{2\pi nC} > 2\pi nL$ ist, überwiegt der Einfluss der Kapazität, und i eilt in der Phase der Potentialdifferenz vor.

Wenn endlich $\frac{1}{2\pi nC} = 2\pi nL$ ist, so heben sich die Wirkungen der Kapazität und der Induktanz auf; man hat keine Phasendifferenz zwischen e und i, und die Impedanz besitzt ihren kleinsten Wert $\mathsf{P} = r$.

122. Stromverzweigung. — Betrachten wir zwei Zweige 1 und 2 (Fig. 136). Der Zweig 1 besitze den Ohm'schen Widerstand r und die Induktanz L, der Zweig 2 die Kapazität C.

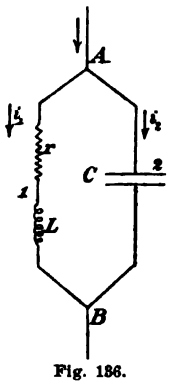

Fig. 136.

Im Zweige 1 ist $C = \infty$, und folglich ist

$$\Lambda_1 = \lambda = 2\pi nL, \qquad \mathsf{P}_1 = \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2};$$

im Zweige 2 dagegen ist $r = 0$, $L = 0$ und folglich

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{2\pi nC}, \qquad \mathsf{P}_2 = \frac{1}{2\pi nC}.$$

Der scheinbare Widerstand P_2, welcher gleich $\sqrt{\Lambda_2^2}$ ist, wurde mit dem Vorzeichen + angenommen, weil derselbe, wie der Ohm'sche, von Natur aus positiv ist.

Wenn die Potentialdifferenz V zwischen den Punkten A und B gegeben ist, erhält man sofort die Werte der Stromstärken in den Zweigen aus den Gleichungen:

$$I_1 = \frac{V}{\varrho}, \qquad I_2 = \frac{V}{\mathsf{P}_2} = 2\pi nCV$$

und als deren Phasenschiebung gegen V die Werte:

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{\lambda}{\varrho}; \qquad \text{tang}\,\varphi_2 = \frac{\Lambda_2}{r_2} = -\infty, \qquad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Stellt OV (Fig. 137) die Potentialdifferenz dar, so sind die Zweigströme bezw. durch den Vektor OI_1, welcher gegen die Potentialdifferenz um den Winkel φ_1 zurückbleibt, und durch den Vektor OI_2, welcher der Potentialdifferenz um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ voreilt, gegeben. Der resultierende Vektor OI stellt den Hauptstrom dar.

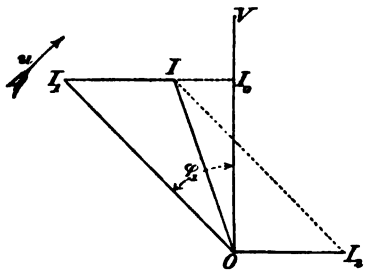

Fig. 137.

Es ist wichtig, zu beachten, wie in diesem Falle im Gegensatze zu dem Falle des vollständigen Fehlens von Kondensatoren zwischen den

Zweigströmen eine Phasendifferenz vorhanden ist, deren Wert zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt.

Aus dieser Thatsache ergiebt sich eine andere wichtige Eigentümlichkeit: der Hauptstrom kann eine Amplitude OI, kleiner als die Amplitude OI_1 des Stromes im Zweige 1 haben. Dies wäre ohne das Vorhandensein von Kondensatoren nicht möglich.

In einem Teile AB eines Stromkreises, welcher eine gegen den Ohm'schen Widerstand r sehr grosse Induktanz L besitzt, kann man dadurch, dass man A und B mit den Belegungen eines Kondensators durch Drähte verbindet, deren Induktanz und Widerstand vernachlässigt werden können, eine gegebene Stromstärke I_1 erreichen, wenn auch im übrigen Teile des Stromkreises nur eine kleinere, doch in gewisse Grenzen eingeschlossene Stromstärke I herrscht.

Bei gegebenen Werten der Stromstärke (I_1), des Widerstandes (r) und der Induktanz (L) des Teiles AB des Stromkreises wollen wir nun den kleinsten Wert I_0 des Hauptstromes suchen, welcher uns noch gestattet, den Wert I_1 der Stromstärke in AB zu erhalten und die Kapazität des dazu notwendigen Kondensators.

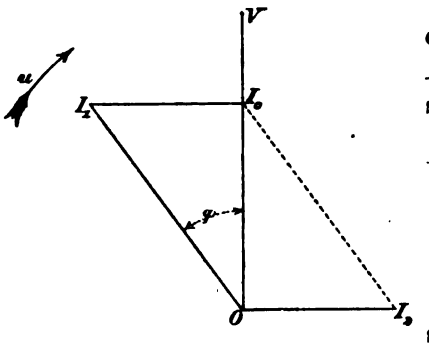

Fig. 138.

Es sei (Fig. 138) OV die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B, OI_1 die in AB gewünschte Stromstärke und φ ihre Phasendifferenz.

Wie einleuchtend, ist der kleinste Wert von I die Projektion von I_1 auf V, nämlich OI_0, d. h.:

$$I_0 = I_1 \cos\varphi = V\frac{r}{\varrho^2}.$$

In dem Zweige, der den Kondensator enthält, muss die Stromstärke den Wert:

$$I_2 = I_1 \sin\varphi = V\frac{\lambda}{\varrho^2}$$

haben, und da $I_2 = 2\pi n C V$ ist, so ist die Kapazität durch die Beziehung:

$$2\pi n C V = V\frac{\lambda}{\varrho^2}$$

oder:

$$2\pi n C = \frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}$$

gegeben.

Die Kapazität des Kondensators hängt also von r und von λ ab.

Besitzt der Stromkreis keine Induktanz, so ist $\lambda = 0$, $I_0 = I$ und

$C = 0$. Man kann folglich in AB einen grösseren Strom als den Hauptstrom nicht erreichen.

Wenn im Teile AB der Ohm'sche Widerstand r sehr gross im Vergleich zu dem induktiven Widerstand λ ist, so ist $I_0 = I_1$ und $C = 0$; auch hier ist es nicht möglich, die gewünschte Wirkung zu erlangen.

Bei einem gegebenen Werte des induktiven Widerstands λ wird mit der Verringerung des Ohm'schen Widerstands r eine grössere Wirkung erzielt, weil der Winkel φ zunimmt; als Grenzwert, für den Fall, dass r verschwindend klein im Vergleich zu λ ist, hat man:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad I_0 = 0,$$

und die Beziehung, welche die Kapazität im Parallelzweige bestimmt, ist:

$$2\pi n C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi n L}$$

oder:

$$4\pi^2 n^2 L C = 1.$$

In diesem Falle fliesst also in dem Zweige AB ein Strom I_1, welcher eine beliebig grosse Intensität besitzen kann, obwohl die Stromstärke I_0 in dem Hauptstromkreise sehr klein ist. Der Strom I_2 im Kondensator ist entgegengesetzt gleich dem Strome I_1, d. h. die beiden Ströme I_1 und I_2 bilden einen einzigen Strom, welcher den aus den beiden Zweigen bestehenden Stromkreis durchfliesst. Dieses System bildet einen wirklichen Resonator, und genügt, wie aus der eben gegebenen Beziehung ersichtlich ist, der Gleichung (13) für die Resonatoren. Wenn der Widerstand r gleich Null ist, so besteht der Strom, nachdem er einmal erzeugt worden ist, unendlich lange fort; wenn man andere, selbst sehr kleine Ströme I_0 wirken lässt, unter der Bedingung, dass dieselben die gleiche Frequenz und dieselbe Phase wie der erste besitzen, so summieren sich ihre Wirkungen im Stromkreise. Wir finden so auf einem anderen Wege wieder die Eigenschaften der Resonatoren und sehen ferner, dass die synchronen Schwingungen nicht nur durch die Wirkung von sehr kleinen E. M. KK. auf den Resonator erzeugt werden können, sondern auch dadurch, dass man in dieselben Ströme von ganz geringer Intensität schickt.

Diese Betrachtungen haben nicht nur eine sehr grosse theoretische Wichtigkeit, sondern auch eine unmittelbare praktische Bedeutung. Sie erklären die Wirkungsweise der Induktanz und der Kapazität in den Wechselstromkreisen und heben die Vorteile hervor, die man in industriellen Betrieben durch die Anwendung von Kondensatoren in Parallelschaltung erreichen kann.

Die industriellen Apparate für die Verwertung der Wechselströme können Widerstände, Induktanzen und E. M. KK. besitzen. Im allgemeinen besteht zwischen der Potentialdifferenz V an den Klemmen des Apparates und dem Strome I, der ihn durchläuft, eine Phasendifferenz, deren Wert von der Induktanz und der E. M. K. im Apparat abhängt. Vermittels eines parallel geschalteten Kondensators kann man bewirken, dass das Verteilungsnetz nicht den ganzen Strom I_1 liefern muss, sondern nur den Strom I_0, welcher die gleiche Phase wie V besitzt; der Strom $\overline{I_0 I_1}$, der in Quadratur mit V ist, wird von dem passend berechneten Kondensator geliefert.

123. Arbeit eines Wechselstromes. — Es seien in einem Teile eines Wechselstromkreises zu einer bestimmten Zeit t

$$i = I \sin 2\pi n t$$
$$v = V \sin (2\pi n t + \varphi)$$

die Werte der Stromstärke und der Potentialdifferenz zwischen den Enden.

Die vom Strome in der Zeit dt geleistete Arbeit ist

$$vidt$$

und in einer ganzen Periode:

$$\int_0^T vidt.$$

Der Mittelwert der Arbeit in einer Periode oder, wenn wir wollen, in einer sehr grossen Zeit, nämlich die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit, ist also:

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T vidt.$$

Durch Einsetzen der Werte für v und i erhält man:

$$w = \frac{VI}{T}\int_0^T \sin 2\pi n t \sin (2\pi n t + \varphi) dt$$

und durch Integration:

$$w = \frac{VI}{2} \cos \varphi,$$

woraus schliesslich, unter Berücksichtigung der Formel (5), folgt:

(15) $$w = \mathfrak{V}\mathfrak{J} \cos \varphi.$$

In analoger Weise berechnet sich die in der Zeiteinheit in einem vollständigen Stromkreise, auf welchen eine einfach harmonische E. M. K. e wirkt, geleistete Arbeit:

(15′) $$w = \mathfrak{E}\mathfrak{J} \cos \varphi.$$

Es genügt also für die Berechnung der Wechselstromarbeit nicht, die beiden Faktoren Stromstärke und Potentialdifferenz bezw. E. M. K. zu berücksichtigen, sondern man muss auch ihre Phasendifferenz in Rechnung ziehen. Man nennt das Produkt $\mathfrak{V}\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{E}\mathfrak{J}$ *scheinbare Arbeit;* dieselbe stimmt mit der *wirklichen Arbeit* w nur in dem Falle überein, dass der Strom die nämliche Phase besitzt wie die Potentialdifferenz oder die E. M. K. Besitzt der Stromkreis oder der in Betracht kommende Teil des Stromkreises keine weiteren E. M. KK. ausser der E. M. K. e, welche den Strom erzeugt, und derjenigen, welche von der Induktanz herrührt, so sind $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{E}$ die Summe der beiden unter sich senkrechten Vektoren $r\mathfrak{J}$ und $\lambda\mathfrak{J}$, und man hat daher:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{V}\cos\varphi\\ \mathfrak{E}\cos\varphi\end{matrix}\right\} = r\mathfrak{J}$$

und folglich:

$$w = r\mathfrak{J}^2.$$

Die ganze vom Strome geleistete Arbeit wird in Wärme umgesetzt; sie hängt nur von dem Ohm'schen Widerstand r und nicht von dem induktiven λ ab. Es giebt also einen charakteristischen Unterschied zwischen dem Ohm'schen und dem induktiven Widerstand, welche gleichwertig sind, so lange man nur den von einem Strome hervorgebrachten Potentialabfall betrachtet, aber nicht mehr in bezug auf die Arbeit. Die Induktanz des Stromkreises übt auf die Energieverwandlung in Form von Wärme keinen Einfluss aus.

Durch einen Ohm'schen Widerstand kann man in einem Stromkreise keine Verminderung der Stromstärke ohne Energievergeudung erreichen; ein induktiver Widerstand bringt dagegen eine Verminderung der Stromstärke ohne Verzehrung von Arbeit hervor. Zu diesem Zwecke werden in der Praxis Spiralen, auf Eisenkerne gewickelt, verwendet, welche geringe Reluktanz besitzen und *Drosselspulen* genannt werden.

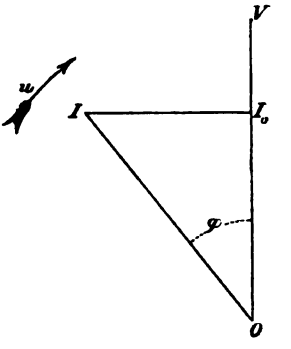

Fig. 139.

Dieselbe Betrachtung kann man auch von einem anderen Gesichtspunkte aus anstellen. Der Strom I (Fig. 139) kann als resultierend aus dem Strom I_0, der in der Phase mit V oder mit E übereinstimmt, und aus dem Strome $I_0 I$, der um $\frac{\pi}{2}$ dagegen zurückbleibt, angesehen werden. Nun ist:

$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J}\cos\varphi$$

und folglich:

$$w = \begin{cases} \gamma\, \mathcal{J}_0 \\ \mathcal{E}\, \mathcal{J}_0 \end{cases}.$$

Die geleistete Arbeit hängt also nur von der Stromkomponenten ab, welche in der Phase mit der E. M. K. übereinstimmt; der Strom in Quadratur ist ein *effektloser* Strom, der keine Arbeit leistet, dessen Wattzahl also gleich Null ist (weshalb er auch oft, aber unzweckmässig, als „wattloser Strom" bezeichnet wird).

Diese Betrachtungen sind von grossem Belang für die praktischen Nutzanwendungen der Wechselströme. In einem industriellen Apparat wird im allgemeinen die Phasendifferenz zwischen V und I durch einen Strom in Quadratur erhalten, welcher weder Arbeit leistet, noch solche verzehrt. Dieser effektlose Strom bringt zwar keinen Verlust in den Strom verbrauchenden Apparaten mit sich, zwingt jedoch das Verteilungsnetz, nicht nur den Strom OI_0, sondern einen grösseren Strom OI aufzunehmen und zu übertragen, und verursacht daher einen grösseren Verlust im Netze wegen des Joule'schen Effektes.

Wie wir im vorigen Abschnitte gesehen haben, kann der in Quadratur befindliche Strom direkt an Ort und Stelle von einem zu dem Apparat parallel geschalteten, passend gewählten Kondensator geliefert werden; daher erkennt man die grossen Vorteile, die man aus der Verwendung der Kondensatoren gewinnen könnte, wenn ihre Konstruktion den Anforderungen der Praxis genügen würde.

Wir können uns auch noch auf andere Weise über die Thatsache Rechenschaft geben, dass der in Quadratur befindliche Strom $I \sin \varphi$ keine Arbeit leistet, und zwar mit Hilfe der graphischen Darstellung durch die

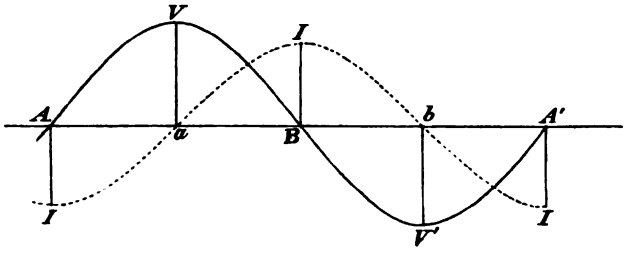

Fig. 140.

Kurven, welche als Abscissen die Zeiten und als Ordinaten die Momentanwerte der betrachteten Wechselstromgrössen haben. Die Kurven stellen zwei Sinuswellen dar; diejenige, die E oder V angiebt, eilt um eine Viertelperiode derjenigen vor, welche $I \sin \varphi$ darstellt (Fig. 140). Die Arbeit des Stromes $I \sin \varphi$ ist in jedem Moment durch das Produkt der

Ordinaten der beiden Kurven gegeben; dieselbe ist positiv auf den Strecken wie z. B. aB, bA', ..., in welchen die Ordinaten gleiches Vorzeichen haben, und negativ auf den Strecken wie z. B. Aa, Bb, ..., in welchen die Ordinaten mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen sind.

Die Arbeit ist also abwechselnd positiv und negativ und wechselt ihr Vorzeichen jede Viertelperiode. Nun entsprechen jeder Viertelperiode Arbeiten, die in absolutem Werte gleich sind, weil die beiden Grössen dieselbe Reihe von Werten annehmen; es ist also die mittlere Arbeit des Stromes $I \sin \varphi$ gleich Null.

Wir wollen eine physikalische Deutung dieser Thatsache geben. Wenn der Strom Null ist, ist die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes ebenfalls Null, aber die Potentialdifferenz, d. h. die Energie des elektrischen Feldes ist ein Maximum. Von diesem Augenblicke an nehmen die Potentialdifferenz und die elektrische Energie ab, die Stromstärke und die magnetische Energie dagegen zu; nach einer Viertelperiode ist v gleich Null und die Stromstärke ein Maximum. Es wird also in dieser Viertelperiode vom elektrischen Felde Arbeit geleistet; die ganze elektrische Energie setzt sich in magnetische Energie um. In der nachfolgenden Viertelperiode wächst v in umgekehrtem Sinne an, und der Strom nimmt ab und leistet eine negative Arbeit, welche die Umwandlung der magnetischen in elektrische Energie darstellt, u. s. w. Es treten also der Reihe nach periodische Umwandlungen von Energie auf, ohne dass äussere Arbeit aufgewandt oder gewonnen wird.

Wenn der Wechselstrom nicht einfach harmonisch ist, so stimmt der Wert der effektiven, vom Strome geleisteten Arbeit w allgemein mit dem Werte der scheinbaren, durch das Produkt $\mathfrak{V}\mathfrak{J}$ gegebenen Arbeit ebenfalls nicht überein, aber das Verhältnis dieser beiden Arbeiten kann nicht mehr einfach durch den Cosinus eines Winkels ausgedrückt werden.

Das Verhältnis $\frac{w}{\mathfrak{V}\mathfrak{J}}$, dessen Betrachtung grosse Wichtigkeit bei den industriellen Apparaten besitzt, wird *Leistungsfaktor* oder auch Faktor oder Koefficient des Arbeitsverlustes genannt. Kapp nennt es *plant efficiency*.

124. Induktanz und Kapazität der elektrischen Leitungen. — Ein Wechselstromkreis weist immer Selbstinduktion und Kapazität auf. Selbstinduktion zeigt er, weil es nicht möglich ist, den magnetischen Induktionsfluss, welcher vom Strome erzeugt wird und mit dem Stromkreise verkettet ist, zu Null zu machen; er besitzt ferner stets, auch wenn in ihm keine eigentlichen Kondensatoren enthalten sind, eine gewisse Kapazität, weil zwischen den einzelnen Punkten auf der Strombahn, die ja verschiedenes

Potential besitzen, und zwischen diesen und den umgebenden Körpern (insbesondere der Erde, welche das Potential Null besitzt) ein elektrisches Feld besteht.

Der Wert der Induktanz hängt von der Anordnung des Stromkreises und von der magnetischen Permeabilität der umgebenden Körper ab, in welchen sich das magnetische Feld bildet; der Wert der Kapazität hängt von der Anordnung des Stromkreises und von der Dielektrizitätskonstanten der Körper ab, in welchen das elektrische Feld entsteht.

Bei dem Studium eines Verteilungsnetzes, d. h. der Leitungen, welche den Strom von der Zentralstation d. i. der Erzeugungsstelle des Stromes an die Empfangsstationen d. i. die Verbrauchsstellen führen, muss man sowohl der Induktanz als auch der Kapazität Rechnung tragen.

Selbst in einer einfachen, aus zwei Drähten, dem Hin- und Rückleiter, bestehenden Leitung kann, wenn deren Länge gross ist, die Induktanz erhebliche Werte erreichen. In der Praxis benutzt man besondere Anordnungen, um die Induktanz so klein wie möglich zu machen. So benutzt man als unterseeische und unterirdische Leitungen sog. konzentrische Kabel. Diese sind aus zwei Leitern gebildet, von denen der eine zylindrisch, der andere röhrenförmig und mit dem ersten koaxial angeordnet ist. Passende Isolationsschichten isolieren die beiden Leiter von einander und den äusseren von der Erde oder dem Wasser, in welche das Kabel gelegt wird; äussere Blei- oder Eisenarmierungen dienen als mechanischer Schutz.

Eine andere ebenfalls gebräuchliche Anordnung (Ferranti) ist die von zwei koaxialen röhrenförmigen Leitern, die entsprechend gegen einander und gegen aussen isoliert sind. In diesen Fällen ist die Induktanz ein Minimum, weil die in den beiden Leitern laufenden Ströme hinsichtlich ihrer Fernwirkungen zwei entgegengesetzt gleichen, in der Achse selbst verlaufenden Strömen gleichwertig sind.

Von der Thatsache, dass eine elektrische Leitung immer eine gewisse, zuweilen auch bedeutende Kapazität besitzt, kann man sich leicht dadurch Rechenschaft geben, dass man einige besondere Fälle betrachtet.

In einem konzentrischen Kabel stellen die beiden Leiter die Belegungen, die dazwischenliegende Isolation das Dielektrikum eines wirklichen, zylindrischen Kondensators dar. Im Falle zweier paralleler Kabel ist jedes derselben einem zylindrischen Kondensator äquivalent, welcher als innere Belegung den Leiter und als äussere den metallischen Schutzmantel des Kabels hat; die beiden äusseren Armaturen sind mit einander in Verbindung durch die Erde oder das Wasser, worin sie sich befinden, und folglich ist der Komplex beider Kabel dem System zweier zylindrischer, hintereinander geschalteter Kondensatoren gleichwertig. Bei Luftleitungen entsteht das elektrische Feld zwischen den beiden Leitern

und zwischen jedem einzelnen und der Erde; hier ist die Kapazität viel kleiner, aber im allgemeinen doch nicht ganz verschwindend.

125. Wirkung der Induktanz und der Kapazität in einem Wechselstromnetze. Ferranti'sches Phänomen. — Eine von Wechselstrom durchflossene elektrische Leitung besitzt immer, wie schon erwähnt, eine Induktanz und eine Kapazität. Wie dieselben sich berechnen lassen, werden wir später betrachten; wir wollen zunächst zusehen, welchen Einfluss das Vorhandensein von Induktanz und Kapazität in einem Wechselstromnetze ausübt.

Betrachten wir den einfachen, praktischen Fall, dass ein Strom von einer Erzeugerstation A (Fig. 141) durch eine aus Hin- und Rückleiter bestehende Leitung nach einer einzigen Empfangsstation B, in welcher die Stromverbraucher sind, fliesst. Wir können in Gedanken dieses System

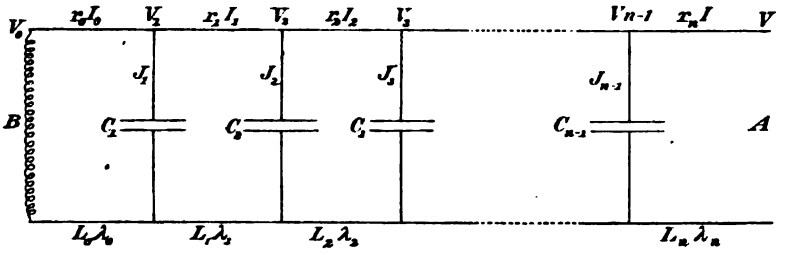

Fig. 141.

durch ein ideelles, der Wirklichkeit beliebig nahe kommendes System ersetzen, indem wir die Leiter selbst zwar als kapazitätsfrei, aber zwischen denselben parallel geschaltete Kondensatoren als vorhanden annehmen. Die Zahl dieser Kondensatoren sollte, da die Kapazität auf die ganze Länge des Netzes verteilt ist, unendlich gross sein, wir können uns aber mit einer endlichen Zahl passend zwischen den Endpunkten A und B angeordneter Kondensatoren begnügen. Je grösser die Zahl der betrachteten Kondensatoren sein wird, um so mehr werden wir uns der Wirklichkeit nähern.

Als gegeben haben wir, der Grösse und Phase nach, die zum Betriebe des Stromverbrauchapparates B nötige Potentialdifferenz v_0 und die Stromstärke i_0 anzusehen; zu ermitteln sind die entsprechend vom Generator A zu erzeugenden Grössen v und i. Im allgemeinen sind v und i wegen des Einflusses des Widerstandes, der Induktanz und der Kapazität der Strombahn von v_0 und i_0 verschieden.

Wir bezeichnen mit r, L und $\lambda = 2\pi n L$ bezw. den Ohm'schen Widerstand, die Induktanz und den induktiven Widerstand der Gesamtheit

der Hin- und Rückleiter für eine beliebige durch die Abzweigpunkte zweier einander folgender Kondensatoren begrenzte Strecke, mit i die Intensität des Stromes, der dieselbe durchfliesst, und ferner mit den Indices 1, 2, 3 ... die einzelnen Strecken der Leitung. Wir setzen den Ohm'schen und den induktiven Widerstand der die Kondensatoren enthaltenden Zweige gleich Null voraus und bezeichnen mit C, v und j, ebenfalls mit den Indices 1, 2, 3 ··· versehen, bezw. die Kapazität, die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen der Kondensatoren und die Stärke der Ströme, welche sie durchfliessen.

Bei dieser schematischen Anordnung variiert die Stromstärke sprungweise in den Abzweigpunkten der Kondensatoren, während sie in einem wirklichen Netze durch Einfluss der Kapazität stetig variiert.

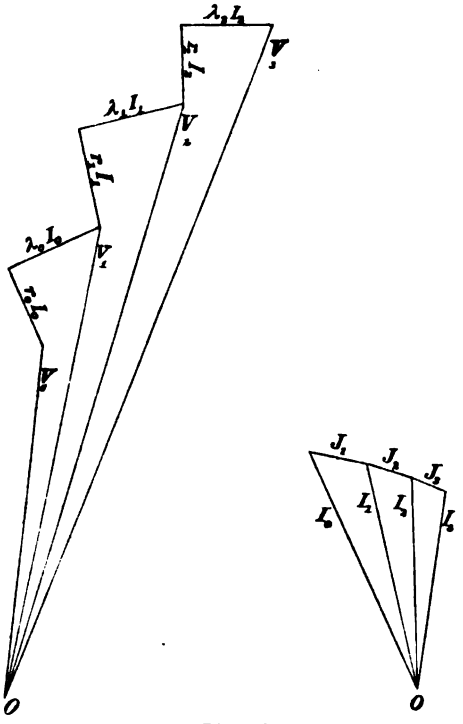

Fig. 142.

Es seien die zwei Vektoren OV_0 und OI_0 (Fig. 142) gegeben, welche v_0 und i_0 darstellen; wir können, von B nach A fortschreitend, nach einander alle Werte von i nach v durch graphische Konstruktionen ermitteln.

Für die erste Strecke, zwischen der Empfangsstation und dem Kondensator C_1, haben wir nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$v_1 - v_0 - L\frac{di_0}{dt} = r_0 i_0$$

oder:

$$v_1 = v_0 + r_0 i_0 + L\frac{di_0}{dt}.$$

Der Vektor OV_1, welcher v_1 darstellt, ist also die Summe aus drei Vektoren: V_0, $r_0 I_0$ parallel zu I_0 und $\lambda_0 I_0$ senkrecht zu I_0.

Nachdem V_1 gefunden, ergiebt sich als der Wert der Stromstärke im Kondensator C_1:

$$J_1 = 2\pi n C_1 V_1,$$

welcher bekanntlich eine Phasenvoreilung von 90° gegen den Wert von V_1 aufweist.

Betrachten wir nunmehr die zweite Strecke, welche zwischen den Kondensatoren C_1 und C_2 gelegen ist.

Allgemein gilt die Gleichung:

$$i_1 = i_0 + j_1,$$

folglich ist der Vektor OI_1, welcher den Strom angiebt, die Resultierende aus den beiden Vektoren, welche bezw. i_0 und j_1 darstellen. Nachdem I_1 gefunden ist, kann man V_2 in analoger Weise wie V_1 ermitteln. Das Ohm'sche Gesetz, auf die zweite Strecke angewandt, giebt uns die Beziehung:

$$v_2 = v_1 + r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt},$$

und der Vektor V_2 ist die Resultierende aus dem Vektor V_1 und aus den Vektoren $r_1 I_1$ parallel zu OI_1 und $\lambda_1 I$ normal zu OI_1. Aus dem Werte von V_2 ergiebt sich als Wert der Stromstärke im zweiten Kondensator:

$$J_2 = 2\pi n C_2 V_2,$$

wobei wiederum eine Phasenvoreilung von 90° gegen V_2 auftritt.

In derselben Weise hat man die Berechnungen für die nachfolgenden Strecken bis zur Erzeugungsstation vorzunehmen.

In einem Gleichstromnetze ist die Stromstärke konstant und das Potential sinkt proportional dem Ohm'schen Widerstand von der Erzeugernach der Empfangsstation zu; in einem Wechselstromnetze dagegen können die Stromstärke und das Potential je nach dem Widerstand, der Induktanz und der Kapazität des Netzes, und je nach den Betriebsverhältnissen beliebig variieren.

In den betrachteten Beispielen nimmt das Potential von der Erzeugerstation A nach der Empfangsstation B hin ab; die Stromstärke besitzt nicht einen konstanten Wert längs der ganzen Linie, sondern wächst von A nach B, weil die Ströme j der Kondensatoren sich zu dem von A gelieferten Strome addieren; die Zunahme der Stromstärke ist um so grösser, je grösser die Kapazität des Netzes ist.

In demselben Netze können, wenn die Betriebsverhältnisse geändert werden, entgegengesetzte Erscheinungen auftreten, d. h. es kann sein, dass von der Erzeuger- nach der Empfangsstation hin die Potentialdifferenz zu-, die Stromstärke dagegen abnimmt.

Es möge bei dem betrachteten Beispiele der Stromkreis im Punkte B eine Unterbrechungsstelle besitzen, sodass der Strom I_0 sehr klein oder gleich Null wird. Unter diesen Umständen ($I_0 = 0$, $r_0 I_0 = 0$, $\lambda_0 I_0 = 0$) fällt V_1

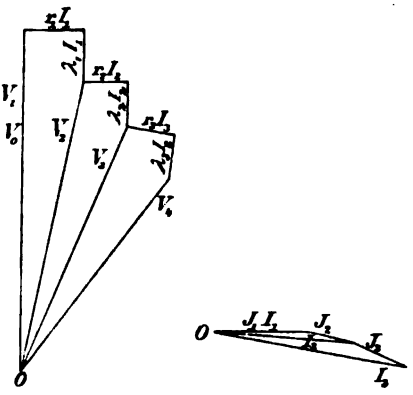

Fig. 143.

mit V_0 zusammen, und $I_1 = J_1$ steht senkrecht zu V_0. Aus der Fig. 143, in welcher die analogen Konstruktionen wie im vorigen Falle ausgeführt sind, ergiebt sich, dass die Werte von I der Reihe nach von B nach A ansteigen, diejenigen von V dagegen sinken.

Diese Thatsachen, die auf den ersten Blick paradox erscheinen können, wurden zuerst von dem Ingenieur Ferranti in London bei einem konzentrischen Kabel, das eine Länge von mehreren Kilometern besass, experimentell wahrgenommen, und erhielten deswegen den Namen *Ferranti'sches Phänomen.*

Bei der Behandlung des von uns gewählten Beispieles haben wir von den unvermeidlichen Verlusten längs der Linie abgesehen; um dieselben in Rechnung zu ziehen, wäre es genügend gewesen, in den Anschlusspunkten der Kondensatoren zwischen den beiden Leitern passende Widerstände R anzunehmen und auf die Ströme $\frac{V}{R}$ in Phase mit v den ersten Kirchhoff'schen Satz in Anwendung zu bringen.

Wie schon bemerkt, sollten bei einer genauen Berechnung die Strecken, in welche wir die Leitung zerteilten, unendlich klein sein; wir hätten dann partielle Differentialgleichungen zu betrachten.

Die entsprechende Rechnung wurde von O. Heaviside unter der Annahme ausgeführt, dass alle Grössen gleichmässig längs der Linie verteilt seien; wir erwähnen, ohne die Entwickelung zu geben, die Ergebnisse, zu welchen er gelangte.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{J}_0$ die effektiven Werte der Potentialdifferenz und der Stromstärke in der Erzeuger- und Empfängerstation, mit r, C, L, g die Werte des Widerstandes, der Kapazität, der Induktanz und der Leitfähigkeit der Isolation (d. i. des Reziproken des Isolationswiderstandes), als gleichmässig verteilt angenommen, auf die Längeneinheit bezogen und in praktischen Einheiten ausgedrückt, und ferner mit l die Länge der Leitung in km. und mit n die Frequenz des Stromes, und setzen wir $\omega = 2\pi n$, so haben wir:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \cos_h lz + y\mathfrak{J}_0 \sin_h lz$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \cos_h lz + \frac{\mathfrak{V}_0}{y} \sin_h lz,$$

worin:

$$z = \sqrt{(r + \varepsilon\omega L)\,(g + \varepsilon\omega C)},$$

$$y = \sqrt{\frac{r + \varepsilon\omega L}{g + \varepsilon\omega C}},$$

$$\varepsilon = \sqrt{-1}$$

und $\sin_h$, $\cos_h$ bezw. den hyperbolischen Sinus und Cosinus bedeutet.

Man beachte jedoch, dass eine gleichmässige Verteilung der Kapazität und der Verluste längs des Netzes nicht möglich ist, weil immer störende Verhältnisse in einigen Punkten auftreten, wie beispi

Porzellanisolatoren bei Luftleitungen und an den Verbindungsstellen bei Kabeln. Aus diesen Gründen ist es in der Praxis nicht nötig, sich der Formel von Heaviside zu bedienen, und es genügt vollständig, selbst für grosse Längen, das von uns oben eingeschlagene Verfahren anzuwenden.

126. Berechnung der Kapazität eines Netzes. — Wir wollen nun zusehen, wie man in den praktisch wichtigsten Fällen die Berechnung der Kapazität der elektrischen Leitungen vornimmt.

1. Die Kapazität eines konzentrischen Kabels, welches einem wirklichen zylindrischen Kondensator gleichkommt, ist (14) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}},$$

wobei l die Länge des Kabels, R_1 der äussere Radius des inneren Leiters, R_2 der innere Radius des äusseren Leiters und ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet.

2. In dem Falle zweier paralleler, konzentrischer Kabel berechnet man getrennt die Kapazität C_1 und C_2 jedes einzelnen derselben durch die eben erwähnte Formel; die Kapazität C des Komplexes der beiden Leiter berechnet man durch die bekannte Formel [46], welche die Kapazität zweier hintereinander geschalteter Kondensatoren angiebt:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ist $C_1 = C_2$, so ist:

$$C = \frac{1}{2} C_1.$$

3. Die Kapazität eines einzigen Drahtes einer Luftleitung ist (15) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{2d}{r}},$$

wobei mit r der Radius des Drahtes und mit d der Abstand zwischen Draht und Erde bezeichnet wird.

4. Die Kapazität zweier paralleler Drähte einer Luftleitung wird angenähert durch die Formel (16) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \log \frac{D}{r}}$$

ausgedrückt, worin r der Radius der Drähte und D die Entfernung zwischen deren Achsen ist.

In dem Falle von Luftleitungen bildet jedoch jeder der Isolatoren, welche den Draht tragen, einen wirklichen Kondensator in Parallelschaltung zwischen dem Draht und der Erde; und im allgemeinen ist die

gesamte Kapazität der Isolatoren grösser als jene des Drahtes selbst. Eine theoretische Berechnung ist hier nicht mehr möglich, und es ist besser, sich auf Ergebnisse der Erfahrung, die an ähnlichen Leitungen gewonnen worden sind, zu beziehen.

Übrigens ist die Kapazität einer Luftleitung allgemein sehr klein, und abgesehen von Fällen, in welchen die Leitung sehr lang ist, kann ihre Wirkung vernachlässigt werden.

Es ist zu beachten, dass die Kapazität in diesen Formeln in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt ist; will man dieselben in elektromagnetischen Einheiten haben, so hat man sie mit dem entsprechenden Umrechnungsfaktor zu multiplizieren.*)

127. Berechnung der Induktanz in einem Verteilungsnetze. — Wir haben gesehen [110], dass die Induktanz eines Stromkreises nur dann eine vollkommen bestimmte Grösse ist, wenn das Medium, das ihn umgiebt, eine konstante magnetische Permeabilität besitzt; diese Bedingung ist bei den elektrischen Leitungen erfüllt oder kann näherungsweise als erfüllt angenommen werden.

Bei der Definition der Induktanz eines Stromkreises haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass dieser fadenförmig wäre; nun darf man aber in dem Falle der elektrischen Leitungen die Dimensionen der Leiter nicht mehr vernachlässigen. Um deren Induktanz zu berechnen, muss man folglich die Verteilung der Stromstärke auf den Querschnitt kennen. Wir werden in dem nächsten Abschnitte sehen, dass ein Wechselstrom sich nicht gleichmässig auf den ganzen Querschnitt des Leiters verteilt, sondern dass die Stromdichte von innen nach aussen zunimmt; für eine streng genaue Berechnung der Induktanz wäre es aber notwendig, zuvor die Stromteilung auf den Querschnitt durch ein Verfahren, das wir angeben werden, zu ermitteln. Praktisch benutzt man ein weniger strenges, aber schnelleres Verfahren und nimmt man als Wert der Induktanz den Mittelwert aus den Grenzwerten an, welche dem Vorhandensein eines gleichförmig auf den Querschnitt verteilten Stromes und eines in einer dünnen, peripherischen Schicht konzentrierten Stromes entsprechen.

Betrachten wir einige besondere Fälle, welche für die Praxis von Bedeutung sind.

1. *Konzentrisches Kabel mit axialem Leiter.* — Es sei OO die Achse (Fig. 144), a der Radius des inneren Leiters, b und c bezw. der innere und der äussere Radius des röhrenförmigen Leiters; der ebenfalls röhren-

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

förmige Teil von der Dicke $b—a$ ist von der Isolation eingenommen. Wenn der innere Leiter von einem Strome i_g durchflossen wird, so fliesst ein gleicher Strom in entgegengesetzter Richtung in dem äusseren Leiter.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Stromstärke gleichmässig auf den Querschnitt des Leiters verteilt sei.

Aus einfachen Symmetriegründen sind in dem von diesem System erzeugten Felde die Kraft- und die Induktionslinien Kreise, deren Mittelpunkte sich auf der Achse OO befinden und deren Ebenen normal zur Achse sind. Die magnetische Kraft und die magnetische Induktion besitzen längs jedes dieser Kreise konstanten Wert.

Das Integral der magnetischen Kraft längs des ganzen Umfanges eines Kreises mit dem Radius x ist (9) [100]:

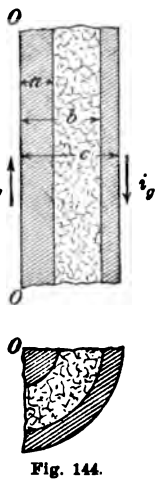

Fig. 144.

$$\mathfrak{H} 2\pi x = 4\pi i,$$

woraus sich der Wert der Kraft $\mathfrak{H}$ für die Punkte des Kreisumfanges selbst ergiebt:

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{x}.$$

In diesen Ausdrücken bezeichnet i die Intensität des Stromes, der durch die Fläche des betrachteten Kreises hindurchgeht, und folglich ist der Wert von $\mathfrak{H}$ unabhängig von dem Strome, der ausserhalb des Kreises fliesst.

Für einen beliebigen ausserhalb des Kabels gelegenen Punkt ist $i = i_g - i_g = 0$ und folglich auch $\mathfrak{H} = 0$, d. h. das Feld ist gleich Null.

Längs des Kreises mit dem Radius x hat die magnetische Induktion den Wert:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \frac{2\mu i}{x}.$$

Wenn wir in der Entfernung x von der Achse OO in einer durch die Achse gelegten Ebene ein unendlich schmales Rechteck mit den Seiten l und dx betrachten, wobei l die Länge des Kabels bedeutet, so ist der Induktionsfluss, der das Rechteck durchdringt:

$$\mathfrak{B} l dx = 2\mu l i \frac{dx}{x},$$

und der gesamte vom Strome erzeugte Fluss ist durch den Ausdruck:

$$\varphi = 2l \int_0^c \mu i \frac{dx}{x}$$

gegeben.

Wir wollen die dem inneren Leiter, der isolierenden Schicht und dem äusseren Leiter entsprechenden Teile des Integrals getrennt berechnen.

Für den inneren Leiter ist $x < a$; die beiden Ströme i und i_g stehen zu einander in demselben Verhältnis, wie die Flächeninhalte der beiden Kreise mit dem Radius x bezw. a, d. h. es ist $i = i_g \frac{x^2}{a^2}$. Man hat daher:

$$\int_0^a \mu i \frac{dx}{x} = \frac{\mu i_g}{a^2} \int_0^a x dx = \frac{\mu}{2} i_g.$$

Für den Isolator ist $i = i_g$, $\mu = 1$, also

$$\int_a^b \mu i \frac{dx}{x} = i_g \log \frac{b}{a}.$$

Endlich gleicht die Stromstärke i eines Stromes, der in dem äusseren Leiter verläuft, der Differenz zwischen der Stromstärke i_g im inneren Leiter und der dieser entgegengesetzten Stromstärke in dem durch den Kreis mit dem Radius x begrenzten Teil des äusseren Leiters. Diese abzuziehende Stromstärke und die gesamte Stromstärke i_g im äusseren Leiter verhalten sich wie die Flächeninhalte der Kreisringe mit den Halbmessern b und x, bezw. b und c. Man hat nämlich:

$$i = i_g - i_g \frac{x^2 - b^2}{c^2 - b^2} = i_g \frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2};$$

ferner hat μ denselben konstanten Wert wie im inneren Leiter. Daher:

$$\int_b^c \mu i \frac{dx}{x} = \frac{\mu i_g}{c^2 - b^2} \int_b^c \frac{c^2 - x^2}{x} dx = \frac{\mu i_g c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} - \frac{\mu}{2} i_g.$$

Durch Summation der drei Teile des Integrals erhält man:

$$\varphi = 2 l i_g \left[\log \frac{b}{a} + \mu \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} \right].$$

Der von der Einheit der Stromstärke hervorgebrachte Fluss, d. h. die Induktanz des Systems ist also:

$$L' = 2 l \left[\log \frac{b}{a} + \mu \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} \right].$$

Der so gefundene Wert der Induktanz ist unter der Annahme errechnet, dass der Strom gleichmässig auf den Querschnitt des Leiters verteilt ist, und dies ist der Maximalwert, den die Induktanz annehmen kann.

Den unteren Grenzwert der Induktanz erhält man, wenn der Strom als in sehr dünnen, peripherischen Schichten konzentriert angenommen wird. Wenn wir voraussetzen, dass sich der Stromkreis auf zwei unend-

lich dünne Schichten mit dem Radius a bezw. b reduziere, und die Rechnung in analoger Weise wie vorhin ausführen, so finden wir für die Induktanz den Wert:

$$L'' = 2l \log \frac{b}{a}.$$

Alle möglichen Werte der Induktanz sind zwischen den Werten L' und L'' eingeschlossen; man kann also als praktischen Wert den Mittelwert dieser beiden annehmen:

$$L = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b}\right].$$

2. *Konzentrisches Kabel, gebildet aus zwei röhrenförmigen koaxialen Leitern.* — Bezeichnen wir mit a_0 und b, a und c (Fig. 145) die inneren bezw. die äusseren Radien der beiden Leiter.

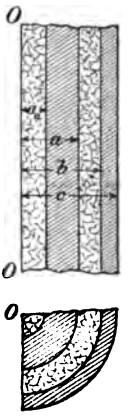

Fig. 145.

Indem man diesen Fall wie den vorigen behandelt, ergiebt sich der einem gleichmässig verteilten Strome entsprechende Maximalwert der Induktanz zu:

$$L' = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \mu\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} - \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} \log \frac{a}{a_0}\right)\right]$$

und der einem in zwei unendlich dünnen Schichten mit dem Radius b bezw. a konzentrierten Strome entsprechende Minimalwert derselben zu:

$$L'' = 2l \log \frac{b}{a};$$

ihr Mittelwert ist:

$$L = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} - \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} \log \frac{a}{a_0}\right)\right].$$

3. *Leitung, aus zwei parallelen Leitern bestehend.* — Bezeichnen wir mit a bezw. a' den Halbmesser der zwei Leiter (Fig. 146) und mit b den Abstand ihrer Achsen.

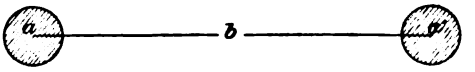

Fig. 146.

Ohne Rücksicht darauf zu nehmen, wie die Verteilung des Stromes auf den Querschnitt der Leiter ist, setzen wir voraus, dass dieselbe wieder symmetrisch in bezug auf die einzelnen Achsen sei, sodass die von einem Strome in einem Punkte hervorgerufene magnetische Kraft gleich $\frac{2i}{x}$ sei.

In dem von dem System der beiden Ströme erzeugten Felde ist die

Kraft $\mathfrak{H}$ in jedem Punkte die Resultierende aus den Kräften $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$, welche von den einzelnen Strömen herrühren,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''.$$

Berechnen wir den mit dem Stromkreise verketteten Fluss φ, welcher senkrecht einen Teil von der Länge l der durch die Achsen bestimmten Ebene durchsetzt. Nehmen wir der Einfachheit halber im ganzen Felde $\mu = 1$ an, so gilt:

$$\varphi = l\int_0^b \mathfrak{H}\,dx = l\int_0^b \mathfrak{H}'\,dx + l\int_0^b \mathfrak{H}''\,dx.$$

Setzen wir zunächst voraus, der Strom sei gleichmässig verteilt, und berechnen wir die einzelnen Teile des Integrals zwischen den Grenzen a und $b - a'$ im Dielektrikum, und zwischen $b - a'$ und b im zweiten Leiter getrennt.

Für $x < a$ ist:

$$\mathfrak{H}' = 2i_g\frac{x}{a^2}, \quad \mathfrak{H}'' = \frac{2i_g}{b-x},$$

daher:

$$\int_0^a \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\Big[\frac{1}{2} + \log\frac{b}{b-a}\Big].$$

Für $a < x < b - a'$ ist:

$$\mathfrak{H}' = \frac{2i_g}{x}, \quad \mathfrak{H}'' = \frac{2i_g}{b-x},$$

daher:

$$\int_0^{b-a'} \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\Big[\log\frac{b-a'}{a} + \log\frac{b-a}{a'}\Big].$$

Für $b - a' < x < b$ ist:

$$\mathfrak{H}' = \frac{2i_g}{x}, \quad \mathfrak{H}'' = 2i_g\frac{b-x}{a'^2},$$

daher:

$$\int_{b-a}^b \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\Big[\frac{1}{2} + \log\frac{b}{b-a'}\Big].$$

Durch Summation der Integrale und Vereinfachung des ermittelten Ausdruckes erhält man:

$$\varphi = 2li_g\Big[\log\frac{b^2}{aa'} + 1\Big];$$

der Maximalwert der Induktanz ist also:

$$L' = 2l\Big[\log\frac{b^2}{aa'} + 1\Big].$$

Den kleinsten Wert der Induktanz erhält man, wenn der Strom in einer unendlich dünnen Schicht auf der Oberfläche des Leiters konzentriert angenommen wird. Man erhält bei dieser Annahme durch ähnliche Rechnung:

$$L'' = 2l \log \frac{b^2}{a a'}.$$

Als praktischen Mittelwert kann man das arithmetische Mittel aus den beiden Werten annehmen:

$$L = 2l \left(\log \frac{b^2}{a a'} + \frac{1}{2} \right).$$

128. Der Skin-Effekt. Gleichungen von Lord Kelvin. Zunahme des Ohm'schen Widerstandes eines Leiters. — Wir haben schon erwähnt, dass ein Wechselstrom sich nicht gleichmässig auf den ganzen Querschnitt eines Leiters verteilt, und es ist jetzt zweckmässig, dass wir uns über die Weise, in welcher diese Erscheinung auftritt, und über die Gesetze, die dabei massgebend sind, Rechenschaft geben.

Betrachten wir einen von Wechselstrom durchflossenen zylindrischen Leiter mit hinreichend grossem, kreisförmigem Querschnitte und stellen wir in Fig. 147 einen Längsschnitt des Leiters dar.

Ist der Strom von unten nach oben gerichtet, so ist das von ihm erzeugte magnetische Feld rechts von der Achse OO, in bezug auf die Ebene der Zeichnung, von hinten nach vorn gerichtet. Wenn in der Nähe keine anderen Leiter vorhanden sind, welche die Symmetrie des Systems stören, so sind die Induktionslinien Kreise mit dem Zentrum auf der Achse, welche in Ebenen senkrecht zu derselben, sowohl ausserhalb wie innerhalb des Leiters liegen.

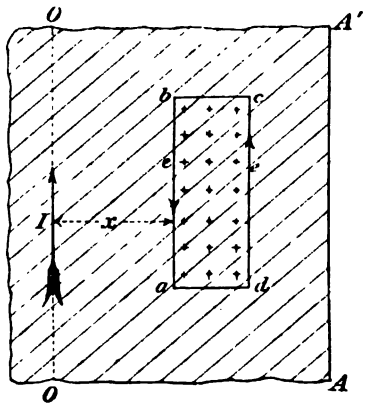

Fig. 147.

Für alle Punkte eines dieser Kreise, durch dessen Fläche ein Teil i des Stromes hindurchgeht, hat die magnetische Kraft denselben Wert $\mathfrak{H} = \frac{2i}{x}$.

In der Zeichnungsebene betrachten wir ein Rechteck $abcd$ mit den Seiten ab und cd parallel zur Achse; in einem bestimmten Moment wird dasselbe von einem magnetischen Fluss φ durchsetzt. Ändert sich die Stromstärke i, so ändert sich auch die Feldstärke und mit ihr auch der

durch das Rechteck hindurchgehende Fluss, und jenes ist mithin Sitz einer E. M. K.:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

In der Zeit, in welcher der Strom wächst, nimmt auch φ zu, $\frac{d\varphi}{dt}$ ist positiv und folglich e negativ, d. h. e sucht in dem Rechtecke einen Strom zu erzeugen, welcher der Drehungsbewegung des im Sinne der Kraftlinien fortschreitenden Maxwell'schen Korkziehers entgegengesetzt ist. Die Pfeile e deuten die Richtung der E. M. K. an; letztere ist beim abnehmenden Strome entgegengesetzt.

In dem Leiter treten also induzierte Ströme auf, welche sich dem Hauptstrome superponieren und eine Ungleichmässigkeit der Verteilung bedingen.

Untersuchen wir näher die Wirkung dieser induzierten E. M. KK.

Bei einer gleichmässigen Verteilung des Stromes wäre die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b gleich derjenigen zwischen d und c, und diese können wir durch den Vektor OV (Fig. 148), in Phasenvoreilung gegen den Strom OI, darstellen. Dieser Potentialdifferenz superponieren sich jedoch die eben betrachteten E. M. KK., in Phase mit $\frac{d\varphi}{dt}$, d. h. mit $\frac{di}{dt}$, welche in den Seiten ab und dc entgegengesetzte Richtungen besitzen und von zwei Vektoren OE und OE' normal zu OI und einander entgegengesetzt dargestellt werden können.

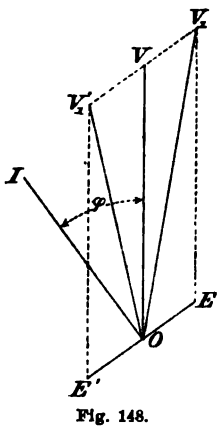

Fig. 148.

Die Potentialdifferenzen zwischen d und c, und a und b, welche bezw. von dem aus OV und OE resultierenden Vektor OV_1 und von dem aus OV und OE' resultierenden Vektor OV_1' angegeben werden, sind indessen von einander verschieden; es ist immer $OV_1 > OV > OV_1'$, weil der Winkel VOE wegen der Phasenverschiebung von I gegen V immer ein spitzer ist, während VOE' ein stumpfer ist.

Es folgt daraus, dass die Potentialdifferenzen und folglich auch die Stromdichten von der Achse nach der Peripherie hin zunehmen. Diese Wirkung ist um so grösser, je grösser der Drahtdurchmesser und die Stromfrequenz sind; letztere übt einen Einfluss nicht nur auf die Änderung des Flusses und folglich auf die induzierten E. M. KK. aus, sondern auch auf die Phasendifferenz V und I und mithin auf die Winkel VOE und VOE'.

Um das mathematische Gesetz der Erscheinung ableiten zu können, beziehen wir diese Darlegungen auf ein unendlich kleines Rechteck von

der Länge *Eins*, welches in einem Längsschnitte des Leiters liegt und zwei Seiten parallel zur Achse in dem Abstande x und $x + dx$ von derselben besitzt. Die an dieser Stelle vorhandene Feldstärke $\mathfrak{H}$ und Stromdichte u sind Funktionen des Abstandes x von der Achse und der Zeit t.

Die Feldstärke ist, wie oft erwähnt, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{x}, \quad \mathfrak{H}x = 2i$$

als Funktion von x gegeben.

Durch Differentiation nach x erhält man:

$$x\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \mathfrak{H} = 2\frac{\partial i}{\partial x},$$

Nun ist $\frac{\partial i}{\partial x}dx$ der Strom, welcher den Kreisring mit den Radien x und $x + \partial x$ durchsetzt, folglich ist, abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = 2\pi u x;$$

es ergiebt sich also:

$$(\alpha) \qquad x\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \mathfrak{H} = 4\pi u x.$$

Die E. M. K. der Induktion, welche auf die Seiten des Rechtecks wirkt, ist eine Funktion des Abstandes von der Achse. Bezeichnet e die E. M. K. in der Seite, welche von der Achse die Entfernung x hat, so ist die E. M. K. in der zweiten Seite: $e + \frac{\partial e}{\partial x}dx$, und folglich ist die auf den gesamten Umfang des Rechtecks wirkende E. M. K.:

$$\frac{\partial e}{\partial x}dx.$$

Andererseits ist der Fluss durch das Rechteck, wenn μ die magnetische Permeabilität des Materials bedeutet, gleich $\mu\mathfrak{H}dx$, und folglich ist die E. M. K. ebenfalls durch:

$$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}dx$$

ausgedrückt.

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke der E. M. K. erhält man:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Hierbei ist als positive Richtung für e diejenige des Stromes i anzusehen, wenn man als positive Richtung für $\mathfrak{H}$ diejenige des vom Strome erzeugten Flusses annimmt.

Ist ϱ der spezifische Widerstand des Materials, aus dem der Leiter besteht, so ist:

$$e = \varrho u,$$

und unter der Voraussetzung, dass ϱ unabhängig von x, d. h. dass der Leiter homogen sei:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial e}{\partial x} = \varrho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

In den beiden Gleichungen (α) und (β) treten zur gleichen Zeit die partiellen Differentialquotienten von $\mathfrak{H}$ und u auf.

Aus diesen kann man leicht zwei andere Gleichungen ermitteln, von welchen eine nur die partiellen Differentialquotienten von u und die andere nur diejenigen von $\mathfrak{H}$ enthalten:

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial t} \\ &\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\mathfrak{H} = 4\pi \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen erhält man die Werte von u und $\mathfrak{H}$ als Funktionen von x; diese Integration kann leicht ausgeführt werden, besonders wenn man die Stromdichte u als sinoïdale Funktion der Zeit voraussetzt.

Ohne diese Berechnungen durchzuführen, wollen wir nur deren Ergebnisse angeben.

Wenn die Frequenz n des Stromes und der Durchmesser d des Leiters erhebliche Werte besitzen, so wird die Stromdichte an der Oberfläche sehr gross und in der Achse praktisch gleich Null, sodass der Strom bei sehr grossen Werten von n und d als in einer dünnen Schicht an der Oberfläche konzentriert angesehen werden kann. Diese Erscheinung ist unter dem Namen *Skin-Effekt* bekannt.

Das Innere eines von einem Wechselstrome mit grosser Frequenz durchflossenen Leiters trägt nicht wesentlich zur Leitung des Stromes bei; der Querschnitt ist nicht gut ausgenutzt. Der Ohm'sche Widerstand R_w, welchen derselbe dem Durchgange des Stromes entgegensetzt, ist folglich grösser, als wenn der ganze Querschnitt ausgenutzt wäre, d. h. grösser als der Widerstand R_ϱ, den derselbe Leiter, von Gleichstrom durchflossen, besitzt. Diese ungleichförmige Stromverteilung bringt auch eine Zunahme der Joule'schen Wärme hervor.

Betrachten wir die Längeneinheit eines homogenen Leiters mit dem spezifischen Widerstande ϱ. Ist dS der Querschnitt der röhrenförmigen

Zone mit den Radien x und $x + dx$, so ist die Stromstärke durch denselben gleich $\mathfrak{U} dS$; der Widerstand des entsprechenden Konduktorteiles ist $\varrho \frac{1}{dS}$, und folglich ist die sich in demselben entwickelnde Wärmemenge:

$$\varrho \mathfrak{U}^2 dS.$$

Man hat also im Leiter einen Strom von der Stärke:

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{U} dS,$$

welcher eine Wärmemenge:

$$\mathfrak{C}_w = \varrho \int \mathfrak{U}^2 dS$$

erzeugt.

Der Ohm'sche Widerstand R_w, den der Leiter dem Durchgang des Wechselstromes entgegensetzt, ist der Quotient zwischen der Joule'schen Wärme und dem Quadrat der Stromstärke, d. h.:

$$R_w = \frac{\mathfrak{C}_w}{\mathfrak{J}^2} = \varrho \frac{\int \mathfrak{U}^2 dS}{[\int \mathfrak{U} dS]^2}.$$

Bei einer und derselben Stromstärke ist der Nenner konstant, während dagegen der Zähler von der Verteilung der Stromdichte auf den Querschnitt abhängt und bei gleichförmiger Verteilung ein Minimum wird. Daher ist der Wert des Widerstandes R_w stets grösser, als wenn der Strom gleichförmig verteilt wäre.

Aus dem gefundenen Ausdruck für R_w kann man das Verhältnis

$$K = \frac{R_w}{R_g}$$

zwischen dem Widerstand R_w, den der Leiter beim Durchgange von Wechselstrom besitzt, und dem nach dem Ohm'schen Gesetze berechneten Widerstand R_g, welchen der Leiter einem Gleichstrome entgegensetzt, ermitteln.

Lord Kelvin gab einen Ausdruck für K als Funktion des Quadrats des Durchmessers d des Leiters und der Frequenz n des Wechselstromes.

In folgender, von Hospitalier nach der Formel von Lord Kelvin berechneten Tabelle sind für verschiedene Werte von $nd^2 = \frac{d^2}{T}$ (wobei d in cm. ausgedrückt ist) die entsprechenden Werte der Konstanten K angegeben, d. h. des Koeffizienten, mit welchem der nach dem Ohm'schen Gesetze berechnete Widerstand multipliziert werden muss, um den wirklichen Widerstand des Leiters beim Durchgang von Wechselströmen zu ermitteln

$nd^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_w}{R_g}$	$nd^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_w}{R_g}$
0	1.0000	1620	1.8628
20	1.0000	2000	2.0430
80	1.0001	2420	2.2190
180	1.0258	2880	2.3937
320	1.0805	5120	3.0956
500	1.1747	8000	3.7940
720	1.3180	18000	5.5732
980	1.4920	32000	7.3250
1280	1.6778	—	—

Für Werte von $\frac{d^2}{T} > 32000$ kann der Widerstand R_w mit genügender Annäherung gleich demjenigen angenommen werden, der nach dem Ohm'schen Gesetze für einen hohlen, zylindrischen Leiter mit dem äusseren Durchmesser gleich dem Durchmesser des gegebenen Leiters und der Dicke gleich $6.38\sqrt{T}$ cm berechnet wird.

Die oben angegebenen Werte für K beziehen sich auf den Fall, in welchem der Leiter aus reinem, die grösste Leitfähigkeit ($\varrho = 1.597$) besitzendem Kupfer besteht; wenn der Leiter aus einem anderen, aber unmagnetischen Metalle gebildet ist, dann sind die Werte der Tabelle mit dem Verhältnisse des spezifischen Widerstandes des betreffenden Metalls zu dem des Kupfers zu multiplizieren.

Besteht der Leiter aus magnetischem Material, z. B. aus Eisen, dann ist die Tabelle nicht mehr giltig, da ganz andere Verhältnisse entsprechend den Werten der magnetischen Permeabilität auftreten.

Aus der Betrachtung der angegebenen Zahlen geht hervor, dass die Erscheinung des Skin-Effektes bei den industriellen Anlagen, bei welchen der Durchmesser der Leitungen selten 1 cm übersteigt und die Frequenz 40 bis 50 beträgt, unberücksichtigt gelassen werden kann; allein bei den grössten in der Praxis bisher verwendeten Frequenzen (100) kann diese Erscheinung bemerklich werden.

Es ist also wohl zu beachten, dass der Wechselstrom bei grosser Frequenz und grossem Leiterquerschnitt nicht nur einen induktiven Widerstand veranlasst, sondern auch eine Zunahme des Ohm'schen Widerstandes bedingt; der induktive Widerstand übt einen Einfluss nur auf das Potentialgefälle längs der Leitung, aber nicht auf die entwickelte Wärmemenge aus; der Skin-Effekt dagegen verursacht wegen der schlechten Ausnutzung des Querschnittes eine grössere Energievergeudung infolge stärkerer Wärmeentwickelung in dem Leiter.

§ 3.

Entladungsströme der Kondensatoren.

129. Lord Kelvins Gleichungen. — Ausser den bereits betrachteten Wechselströmen haben noch andere veränderliche Ströme Wichtigkeit, und zwar die bei der Entladung der Kondensatoren entstehenden Ströme.

Es sei C die Kapazität eines Kondensators, r der Ohm'sche Widerstand des Leiters, welcher die beiden Belegungen A und B verbindet, L der Koeffizient der Selbstinduktion, den wir unter der Annahme, dass sich keine magnetischen Körper in der Nähe des Leiters befinden, als konstant voraussetzen, Q die Elektrizitätsmenge auf einer Belegung vor dem Beginn der Entladung und q der Wert der Ladung zur Zeit t. Es bezeichne ferner, ebenfalls zu der Zeit t, i die Stromstärke, v_1 und v_2 die Potentiale auf den Belegungen und $v = v_1 - v_2$ deren Differenz.

Das Ohm'sche Gesetz, auf den Teil des Stromkreises zwischen den Belegungen angewandt, giebt uns:

$$(\alpha) \qquad v - L\frac{di}{dt} = ri;$$

in der Zeit t ist die Ladung:

$$(\beta) \qquad q = Cv$$

und der Entladungsstrom:

$$(\gamma) \qquad i = -\frac{dq}{dt}.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die drei Grössen q, i und v als Funktionen der Zeit.

Um q zu ermitteln, eliminiere man i und v aus der Gleichung (α) unter Benutzung der Gleichungen (β) und (γ); man erhält dadurch:

$$(16) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = 0.$$

Als ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung erhalten wir:

$$(\delta) \qquad q = Ae^{kt},$$

worin A eine willkürliche und k eine zu bestimmende Konstante ist.

Durch Differentiation der Gleichung (δ) erhält man:

$$\frac{dq}{dt} = kAe^{kt} = kq, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = k^2q,$$

und durch Einsetzung dieser Werte in Formel (16):

$$q\left(k^2 + \frac{r}{L}k + \frac{1}{CL}\right) = 0.$$

Da diese Beziehung für jeden Wert von q gelten muss, so muss k der Gleichung genügen:

$$(\varepsilon) \qquad k^2 + \frac{r}{L}k + \frac{1}{CL} = 0,$$

woraus man folgende beide Werte für k ermittelt:

$$k_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}},$$

$$k_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

Diesen Werten entsprechen zwei partikuläre Integrale der Gleichung (16):

$$(\delta') \qquad \begin{cases} q = Ae^{k_1 t} \\ q = Be^{k_2 t}, \end{cases}$$

wobei A und B willkürliche Konstante sind.

Die Summe beider Integrale (δ')

$$(17) \qquad \begin{cases} q = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} \\ q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left[Ae^{t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \end{cases}$$

ist ebenfalls ein Integral der Gleichung (16) und ist sogar deren allgemeines Integral, weil die beiden Konstanten derart bestimmt werden können, dass q und $\frac{dq}{dt}$ zu einer gegebenen Zeit bestimmte Werte annehmen. Und zwar hat die Ladung in dem Zeitpunkte, von welchem aus wir rechnen, den Wert Q und der Strom ist gleich Null, folglich muss bei $t = 0$:

$$q = Q, \quad i = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0$$

sein.

Daher nimmt für $t = 0$ die Formel (17) die Gestalt an:

$$A + B = Q,$$

demnach ist:

$$k_1 A + k_2 B = 0$$

und:

$$(\eta) \qquad \begin{cases} A = \frac{k_2}{k_2 - k_1} Q \\ B = -\frac{k_2}{k_2 - k_1} Q, \end{cases}$$

und durch Einsetzung der früher berechneten Werte für k_1 und k_2 erhält man:

$$(18)\qquad \begin{cases} A = \frac{Q}{2}\left[1 + \frac{r}{2L}\sqrt{\frac{1}{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \\ B = \frac{Q}{2}\left[1 - \frac{r}{2L}\sqrt{\frac{1}{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \end{cases}.$$

130. Aperiodische und oscillierende Entladung. — Man kann hier, je nach den Werten der unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Grösse $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}$, zwei verschiedene Fälle unterscheiden.

I. Die Wurzelgrösse ist reell, d. h.:

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{CL}, \quad r^2 > \frac{4L}{C}.$$

In der Kurve, welche als Abscissen die Zeiten und als Ordinaten die entsprechenden Werte von q hat (Fig. 149), ist für $t = 0$ $q = Q$: die Kurve geht von einem Punkte mit der Ordinate $OA = Q$ aus. Im Punkte A ist die Tangente der Linie parallel zu der Achse der Zeiten, da $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t = 0$ gleich Null ist. Nachher nimmt die Ordinate mehr oder weniger rasch ab, je nach dem Werte des Quotienten $\frac{r}{L}$, und sie wird gleich Null erst für $t = \infty$; die Kurve nähert sich asymptotisch der Abscissenachse.

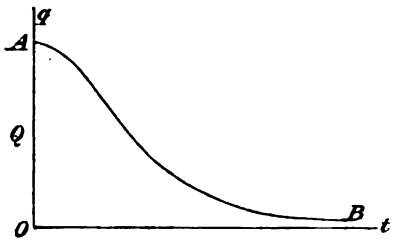

Fig. 149.

In diesem Falle ist $\frac{dq}{dt}$ immer negativ und folglich $i = -\frac{dq}{dt}$ immer positiv, d. h. der Entladungsstrom findet in einer und derselben Richtung statt. Theoretisch wird erst nach einer unendlich grossen Zeit der Strom gleich Null; praktisch besitzt er bereits nach einer sehr kurzen Zeit einen kaum merklichen Wert.

II. Die Wurzelgrösse ist imaginär, d. h. es ist:

$$\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{CL}, \quad r^2 < \frac{4L}{C}.$$

Das Gesetz der Erscheinung ist dann ein ganz anderes. Der Einfachheit in der Schreibweise halber setzen wir:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

d. h.:

$$\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} = \varphi\sqrt{-1},$$

wobei φ eine reelle Grösse ist. Die Formel (17) kann dann geschrieben werden, wie folgt:

$$(17') \qquad q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left(Ae^{t\varphi\sqrt{-1}} + Be^{-t\varphi\sqrt{-1}}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt eine periodische Funktion der Zeit dar, weil die Exponenten trigonometrische Funktionen sind:

$$e^{t\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi t + \sqrt{-1}\sin\varphi t$$
$$e^{-t\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi t - \sqrt{-1}\sin\varphi t.$$

Durch Substitution erhält man:

$$q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left[(A+B)\cos\varphi t + (A-B)\sqrt{-1}\sin\varphi t\right],$$

und, da man nach der Formel (η):

$$A + B = Q$$
$$A - B = \frac{r}{2L}\frac{1}{\varphi\sqrt{-1}}Q$$

findet, hat man ferner:

$$(17'') \qquad q = Qe^{-\frac{r}{2L}t}\left(\cos\varphi t + \frac{r}{2L\varphi}\sin\varphi t\right),$$

worin der Koeffizient von $\sin\varphi t$ in der Klammer eine reelle Grösse ist.

Die Ladung q ist also durch eine trigonometrische Funktion, multipliziert mit einer Exponentialfunktion, ausgedrückt. — Wäre der Faktor $e^{-\frac{r}{2L}t}$ nicht vorhanden, so würde q durch die Sinusfunktion

$$(19) \qquad q = Q\left(\cos\varphi t + \frac{r}{2L\varphi}\sin\varphi t\right)$$

dargestellt sein, d. h. der Kondensator würde nach und nach periodisch entgegengesetzt gleiche Ladungen annehmen. Die Ordinaten dieser Sinusfunktion sind aber mit dem Faktor $e^{-\frac{r}{2L}t}$ zu multiplizieren, welcher mit dem Zunehmen von t abnimmt. Die Kurve, die q als Funktion der Zeit darstellt, besitzt dieselbe Periode wie die eben betrachtete Sinuskurve und schneidet die Abscissenachse in denselben Punkten wie letztere. Ihre Amplitude nimmt jedoch, anstatt einen konstanten Wert beizubehalten,

ab. Thatsächlich sind die den Maximalwerten zugehörigen Abscissen durch den Ausdruck:

$$\cos \varphi t + \frac{r}{2L\varphi} \sin \varphi t = \pm 1$$

gegeben; es entsprechen ihnen die Ordinaten $q = \pm Qe^{-\frac{r}{2L}t}$.

Wenn wir mit ab und $a'b'$ (Fig. 150) die in bezug auf die Abscissenachse symmetrisch gelegenen, durch die Gleichung $q = \pm Qe^{-\frac{r}{2L}t}$ dargestellten Kurven bezeichnen, welche von dem Punkte a mit der Ordinate Q, bezw. von dem Punkte a' mit der Ordinate $-Q$ ausgehen und sich asymptotisch der Achse Ot nähern, so giebt die Linie $amnra_1$, welche sich um die Achse Ot schlängelt und ihre Maxima auf den Kurven ab und $a'b'$ hat, die Momentanwerte von q bei der Entladung an.

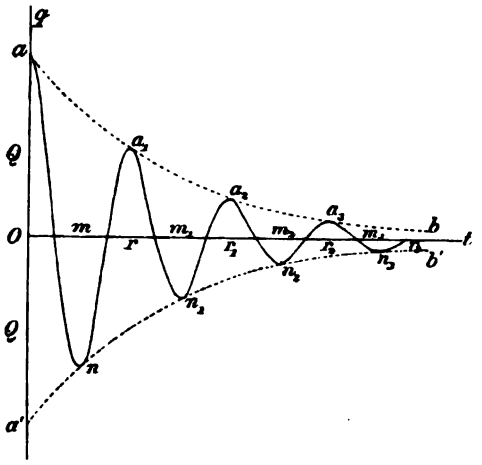

Fig. 150.

Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dt}$ ist abwechselnd positiv und negativ, und folglich ist i ebenfalls durch eine einer Sinuskurve ähnliche Linie dargestellt, deren Maximalwerte jedoch sinken.

In diesem Falle nimmt der Kondensator nach der ersten Entladung eine entgegengesetzte Ladung an, welcher eine zweite Entladung folgt; diese bringt eine neue Ladung in dem ursprünglichen Sinne hervor u. s. w. Die auf einander folgenden maximalen Ladungen haben abnehmende Werte. Theoretisch setzt sich diese Erscheinung bis ins Unendliche fort; praktisch werden die Entladungen nach einer sehr kurzen Zeit nicht mehr bemerklich.

Man sagt in diesem Falle, dass eine *oscillierende Entladung* vorliegt; in der That findet eine Oscillation der Elektrizität von einer zu der anderen Belegung des Kondensators statt. Wir können uns über die verschiedene Weise, in welcher die Entladung eines Kondensators je nach den verschiedenen Zuständen des Stromkreises stattfindet, leicht Rechenschaft geben, wenn wir uns auf analoge Erscheinungen in dem Gebiete der Mechanik beziehen. Eine gespannte Feder beispielsweise befindet sich in einem Zwangszustande und entwickelt elastische Gegenwirkungen, durch

welche sie das Bestreben hat, in die Gleichgewichtslage zurückzukehren, sobald sie sich selbst überlassen wird. Liegt die Feder in einem Medium, welches ihrer Bewegung einen genügend grossen Widerstand entgegensetzt, derart, dass die vorher aufgespeicherte und jetzt sich entwickelnde Energie zum grössten Teil zur Überwindung dieses Widerstandes aufgewandt wird, so erlangt die Feder keine bedeutende lebendige Kraft und nähert sich kontinuierlich der Gleichgewichtslage. Setzt das Medium dagegen einen sehr kleinen Widerstand entgegen, so ist die zur Überwindung desselben nötige Arbeit sehr klein; die Feder erlangt eine erhebliche lebendige Kraft, erreicht mit einer gewissen Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage, geht über dieselbe hinaus und deformiert sich in entgegengesetztem Sinne so weit, bis die elastischen Kräfte eine der in der Feder enthaltenen lebendigen Kraft gleiche Arbeit verzehrt haben, d. h. bis die lebendige Kraft sich ganz in die potentielle Energie der deformierten Feder umgesetzt hat, worauf wiederum dieselben Erscheinungen in entgegengesetztem Sinne auftreten.

In analoger Weise ist das Dielektrikum eines geladenen Kondensators gewissermassen elastischen Reaktionen unterworfen und stellt uns, ebenso wie eine deformierte Feder, eine potentielle Energie dar; bei der Entladung wird diese Energie, wenn der Widerstand des Stromkreises gross ist, ganz oder fast ganz in Wärme umgesetzt, und die Ladung des Kondensators wird zu Null. Ist dagegen der Widerstand klein, so ist auch die durch Umsetzung in Wärme vergeudete Energie gering, und der grösste Teil der potentiellen Energie des Kondensators wird in die kinetische Energie des Entladungsstromes umgewandelt, durch deren Wirkung der Strom auch nach der Entladung des Kondensators fortbesteht und diesen in entgegengesetzter Richtung wieder ladet, bis die kinetische Stromenergie wieder in die potentielle Energie des Kondensators umgesetzt ist. Diese neue Ladung bringt dann dieselben Erscheinungen in entgegengesetztem Sinne hervor.

In der Mechanik sind bei gleichen passiven Widerständen die Schwingungen um so grösser, je grösser die Elastizität und die Masse oder die Trägheit der Feder sind; bei der Entladung des Kondensators sind die Schwingungen gross, wenn L gegen r gross ist.

Die Periode und die Frequenz der Entladung stimmen mit der Periode und der Frequenz der durch die Formel (19) ausgedrückten sinoïdalen Grösse überein. Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem allgemeinen Ausdrucke einer Sinusgrösse ergiebt sich:

$$\varphi = 2\pi n = \frac{2\pi}{T},$$

daher:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}}}.$$

Die Frequenz der Entladung hängt also von den Werten von C, L und r ab; man kann dieselben beliebig variieren durch Änderung der Kapazität des Kondensators oder der Induktanz und des Widerstandes des Stromkreises.

Bei gleichen Werten von C und L nimmt die Frequenz mit dem Abnehmen von r zu; wenn C und L gegeben sind, erhält n seinen grössten Wert für $r = 0$. Dieses Maximum ist:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}}.$$

Für $r = 0$ hat man $\frac{1}{2L\varphi} = 0$ und $e^{-\frac{r}{2L}t} = 1$; folglich reduziert sich die Kurve, die q darstellt, auf eine wirkliche Sinuskurve, für welche die Gleichung gilt:

$$q = Q \cos \varphi t.$$

Dies bedeutet, dass ein im Stromkreise erzeugter Strom unendlich lange fortdauern kann, ohne dass E. M. KK. im Stromkreise wirken, und wir kommen wieder auf den schon mehrmals betrachteten Fall der Resonatoren, da der eben entwickelte Wert von n der Bedingungsgleichung (13) genügt. Wir sehen hier, wie eine dem Kondensator einmal erteilte Ladung zur Erzeugung des Stromes genügt.

Bei einem gegebenen Werte von r wird man immer die Induktanz des Entladungsstromkreises derart bestimmen können, dass die Entladung oscillierend ist und die gewünschte Frequenz besitzt. Theoretisch kann n beliebig zwischen Null und ∞ variieren, aber praktisch sind die Werte von n durch die Werte begrenzt, die man r, L und C zuschreiben kann; man kann aber Entladungen mit sehr grosser Frequenz erzielen. So erhielt Oliver Lodge bei seinen Versuchen Frequenzen zwischen $5 \cdot 10^2$ und 10^8; Heinrich Hertz konnte Schwingungen mit Frequenzen über $6 \cdot 10^8$ erzeugen; Prof. Righi erreichte später auch Frequenzen von $11 \cdot 10^8$ und zur Zeit sind die grössten bei Entladungen erreichten Frequenzen $5 \cdot 10^{10}$.

Um sehr kleine Kapazitäten und dementsprechend hohe Frequenzen zu erreichen, benutzte Hertz einfache ungeschlossene Leiterstücke: z. B. zwei zylindrische, in einer Achse liegende stabförmige Leiter oder Drähte.

131. Eigenschaften der Entladungsströme. Blitzableiter. Tesla-Ströme. — Im allgemeinen ist die Frequenz bei den Entladungsströmen viel höher als bei den in der Technik angewandten Wechselströmen; bei den ersteren müssen sich also alle Erscheinungen zeigen, die von dem periodischen Wechsel der Stromrichtung veranlasst sind, und sogar in hervorragendem Masse. Der Skin-Effekt hat hierbei auch für Leiter mit kleinem Durchmesser eine grosse Bedeutung und kann sogar so gross werden, dass der Strom sich auf einer dünnen Schicht an der Oberfläche des Leiters anhäuft, während der innere Teil desselben nicht ausgenutzt wird, derart, dass man, ohne den Widerstand dadurch zu vergrössern, den massiven Leiter durch einen röhrenförmigen, mit sehr dünnen Wänden versehenen Leiter ersetzen könnte.

Der Widerstand, den der Leiter in diesem Falle aufweist, ist viel grösser als derjenige, den man durch Anwendung des Ohm'schen Gesetzes ausrechnen könnte; auf den metallischen Widerstand übt in diesem Falle, bei oscillatorischen Entladungen, die Frequenz einen erheblicheren Einfluss aus als der spezifische Widerstand des Metalles. Auch der induktive Widerstand $\lambda = 2\pi n L$ wächst mit dem Zunehmen der Frequenz derart, dass der gesamte Widerstand, welchen der Leiter dem Durchgange des Stromes entgegensetzt und welchen Lodge auch *Impedanz* nennt, für grosse Werte der Frequenz erhebliche Werte erreichen kann.

Lodge stellte zur Bestätigung des Gesagten eine Reihe von elementaren Versuchen an, von denen wir einen erwähnen wollen.

Man verbinde die beiden Pole A und B (Fig. 151) einer elektrostatischen Maschine mit den inneren Belegungen zweier Leydner Flaschen, deren äussere Belegungen mit den beiden gegenüberliegenden Kügelchen a und b einer Funkenstrecke in Verbindung sind. Gleichzeitig mit einer Entladung zwischen A und B findet ebenfalls eine Entladung zwischen a und b statt. Der Versuch lehrt, dass ein lebhafter Funken zwischen a und b bestehen bleibt, selbst wenn die beiden äusseren Belegungen direkt durch einen metallischen Draht R mit sehr kleinem Ohm'schen Widerstand in Verbindung gesetzt werden, während dagegen zwischen a und b ein Luftzwischenraum vorhanden ist. Da der Strom sich in den beiden Zweigen R und ab in Teile verteilt, welche umgekehrt proportional den Impedanzen sind, so zeigt uns dieser Versuch, dass die

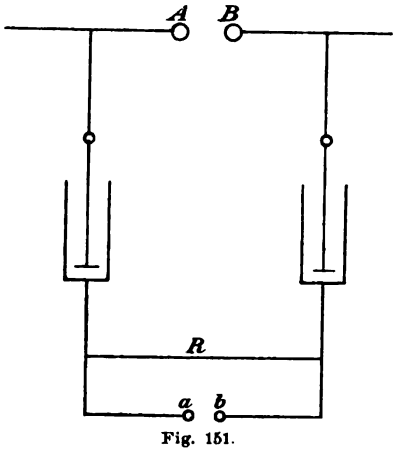

Fig. 151.

Impedanz des Drahtes R viel grösser als der sehr grosse Widerstand des den Luftzwischenraum ab enthaltenden Zweiges ist.

Bei grossen Frequenzen wirkt der spezifische Widerstand des Metalles, aus dem der Leiter besteht, auf die Impedanz nur noch sehr wenig ein, während dagegen die magnetische Permeabilität, von welcher die Induktanz und folglich der induktive Widerstand des Stromkreises abhängen, einen erheblichen Einfluss ausübt. Es ist hierbei zu bemerken, dass allgemein durch Vergrösserung der Induktanz die Dauer der Periode vergrössert oder die Frequenz der Entladung verkleinert wird; einer Verkleinerung der Frequenz entspricht eine Verringerung des Skin-Effektes und des induktiven Widerstandes, sodass die Impedanz durch Verwendung eines aus magnetischem Material gebildeten Leiters kleiner ausfallen kann.

Die Erscheinung ist aber nicht sehr einfach, und es ist nicht leicht, die Verhältnisse der Impedanzen zweier Stromkreise, die in Form, Dimensionen und Substanz sich unterscheiden, zu bestimmen, wenn dieselben von dem Entladungsstrome eines Kondensators durchflossen werden.

Die eben angestellten Betrachtungen sind bei den Blitzentladungen von grossem Belang. Eine Blitzentladung kann mit der Entladung eines Kondensators verglichen werden, dessen Belegungen Wolken und Erde sind. Die Entladung kann oscillierend sein, und dies ist sogar der häufigste Fall. Der Blitzableiter, der als ein Entladungskonduktor zwischen Wolke und Erde wirkt, kann eine grosse Impedanz besitzen, welche mehr von dem induktiven Widerstand und dem Skin-Effekt, als von dem Ohm'schen Widerstand abhängt. Man kann also nur dann sicher sein, dass der Blitz diesem Wege folgt, wenn zwischen der Spitze des Blitzableiters und dem Boden eine Verbindung mit grosser Leitfähigkeit existiert; es kommt in der That vor, dass der Blitz nicht dem Blitzableiter, sondern einem Wege mit kleinerer Impedanz in dem zu schützenden Gebäude folgt.

Diese einfachen Betrachtungen genügen, zu beweisen, wie wenig Wert die sog. Schutzzone im Verhältnisse zu der Länge der Stange hat, und wie die alten Methoden für die Konstruktion der Blitzableiter zu verändern sind.

Die elektromagnetische Lichttheorie von Maxwell und die Versuche von Hertz, mit denen wir uns noch genauer zu beschäftigen haben werden, weisen darauf hin, die Verteilung der Energie für Beleuchtungszwecke durch Ströme mit sehr grosser Frequenz als besonders vorteilhaft erscheinen zu lassen. Nikola Tesla führte in dieser Hinsicht bemerkenswerte Versuche mit hochfrequenten Wechselströmen aus, die er

teils mit speziellen Dynamomaschinen, teils durch Entladung von Kondensatoren erzeugte. Eine der überraschendsten hierbei konstatierten Erscheinungen war die, dass Ströme von sehr hoher Spannung, welche bei den gewöhnlichen bei industrieller Verwertung gebräuchlichen Frequenzen tödlich gewesen wären, durch den menschlichen Körper gefahrlos durchfliessen konnten. Dies rührt daher, dass diese Ströme, wegen ihrer sehr grossen Frequenz, nur an der Oberfläche entlang gleitend, das Innere des Körpers gar nicht durchfliessen.

Sechstes Kapitel.

Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen.

§ 1.

Maxwells elektromagnetische Lichttheorie.

132. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen nichtleitenden Medium. — Wir haben gesehen, dass ein konstanter elektrischer Fluss, d. h. ein Gleichstrom, ausschliesslich in einem geschlossenen metallischen Stromkreise stattfinden kann, weil im Dielektrikum elastische Reaktionen entstehen, welche sich einer weiteren Verschiebung entgegensetzen und den Durchgang des Stromes verhindern. Wir haben ferner gesehen, dass für Wechselströme dagegen die Strombahn nicht geschlossen zu sein braucht, wenn sie Kondensatoren enthält, weil dann in letzteren eine Reihe von Ladungen und Entladungen stattfindet und das Dielektrikum abwechselnd entgegengerichteten Verschiebungen unterworfen ist. Dasselbe gilt, wie für das Dielektrikum eines Kondensators, für alle Dielektrika, und in der That können Verschiebungsströme im ganzen Raume auftreten. Clerk Maxwell gebührt das Verdienst, diese Hypothese zuerst klar zum Ausdruck gebracht zu haben, indem er deren Entwickelung seine ganze Arbeitskraft widmete.

Von einem rein logischen und mathematischen Standpunkte aus, dessen Einnahme mindestens bis zum Gegenbeweis als gerechtfertigt angesehen werden muss, betrachtete Maxwell die Verschiebungsströme unabhängig von ihren Trägern als Ströme, mit denselben Eigenschaften behaftet und denselben Gesetzen unterworfen, wie die elektrischen Ströme in den Leitern. Er setzte nämlich voraus, dass die Beziehungen zwischen dem Strome und dem von demselben hervorgebrachten magnetischen Felde und zwischen der Variation des magnetischen Flusses und der entsprechenden entstehenden E. M. K., wie sie für die Ströme in den Leitern gelten, auch im Falle der Verschiebungsströme bestehen. Nach der Maxwell'schen Auffassung können die Verschiebungsströme, abgesehen von der Verwandlung elektrischer Energie in Joule'sche Wärme, welche in den Leitern, aber nicht in den Dielektriken stattfindet, genau wie die gewöhnlichen elektrischen Ströme behandelt werden.

Von dieser Hypothese ausgehend, leitete Maxwell aus den allgemeinen Gleichungen, welche die elektrischen mit den magnetischen Kräften in gegenseitige Beziehung bringen, Gleichungen ab, welche alle Gesetze eines elektromagnetischen Feldes, d. h. die Gesetze bezüglich der Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte und der Fortpflanzung ihrer Änderungen im Raume, zusammenfassen.

Wir werden in Anlehnung an die Grundgesetze des Elektromagnetismus die Maxwell'schen Gleichungen auf eine einfachere Weise herleiten, die sich von derjenigen Form, die Heinrich Hertz den Gleichungen gab, nur durch eine andere Annahme der Koordinatenachsen unterscheidet.

Die quantitativen Gesetze, welche die elektrischen mit den magnetischen Erscheinungen in Beziehung bringen [109], können wie folgt ausgedrückt werden:

$$(\alpha) \qquad 4\pi i = \int_{C_1} \mathfrak{H}_s ds$$

$$(\beta) \qquad -\frac{d\varphi}{dt} = \int_{C_2} F_s ds,$$

wobei C_1 eine geschlossene, mit den Stromträgern i verkettete Linie ist und C_2 eine ebenfalls geschlossene Linie, durch welche der Fluss φ hindurchgeht.

Wir nehmen nach Maxwell an, dass diese beiden Beziehungen auch für die Verschiebungsströme gelten, und beziehen die Punkte des Raumes auf ein System von orthogonalen Koordinatenachsen $O(xyz)$, die derart angeordnet sind, dass die Achse Oy für einen in der Richtung Ox blickenden Beschauer in dem Sinne des Uhrzeigers rotieren muss, um mit der Achse Oz zusammenzufallen.

Betrachten wir im Raume einen Punkt A (Fig. 152) mit den Koordinaten x, y und z, in welchem die Komponenten der elektrischen Kaft F und der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ nach den Koordinatenachsen bezw. die Werte X, Y, Z und L, M, N besitzen. Die positive Richtung für die Achsen gilt hierbei auch als positive Richtung für die Kraft. Mit ε sei die Dielektrizitätskonstante und mit μ die magnetische Permeabilität des Mediums im Punkte P bezeichnet. Die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ sind Funktionen der Zeit und der Koordinaten.

Wir setzen zunächst voraus, dass es sich um ein vollkommen isolierendes Medium handele, sodass in demselben keine Leitungsströme, sondern nur Verschiebungsströme vorhanden sind und folglich keine Energiemenge unter der Form von Wärme verzehrt wird; wir nehmen ferner an, das Medium sei isotrop, d. h. ε und μ seien für alle Richtungen konstant.

Wir wollen nacheinander die beiden Beziehungen (α) und (β) auf drei unendlich kleine Rechtecke anwenden, die ihre gemeinsame Spitze in

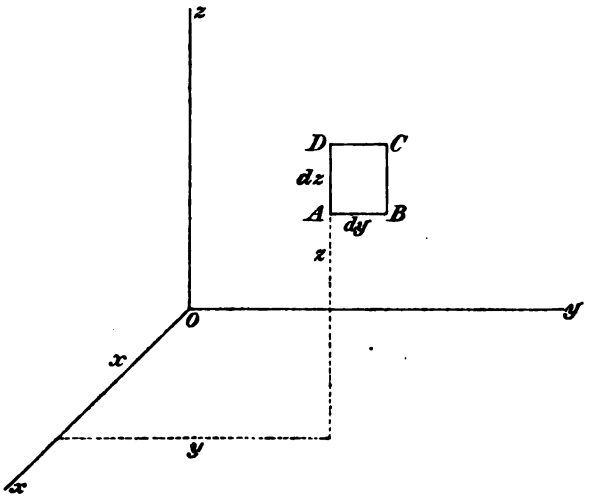

Fig. 152.

A haben und in Ebenen liegen, die bezw. senkrecht zu den Koordinatenachsen sind.

Betrachten wir zunächst das zur Achse Ox senkrechte Rechteck $ABCD$ mit den Seiten dy und dz und wenden wir auf dasselbe die Beziehung (α) an. Die elektrische Verschiebung hat im Punkte A (10′) [44] den Wert:

$$b = \frac{\varepsilon}{4\pi} F;$$

ihre Komponente nach der Achse Ox ist gleich:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} X,$$

und folglich ist der Verschiebungsfluss durch das Rechteck gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} X dy dz.$$

Die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung dieses Flusses ist, wenn ∂X die Änderung der Komponenten X in der Zeit ∂t darstellt, gleich:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} dy dz,$$

d. h. dieser Ausdruck giebt uns die Intensität i des Verschiebungsstromes innerhalb der Begrenzung des Rechteckes in der Richtung Ox.

Es ist jedoch zu beachten, dass der Verschiebungsstrom, wenn ε und X in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt sind, sich ebenfalls in diesen

Einheiten ergiebt, während derselbe dagegen in Formel (α) in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt ist. Man wird daher, wenn v*) das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit der Stromstärke bedeutet, das erste Glied der Formel (α) folgendermassen schreiben müssen:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}dydz.$$

Wir betrachten nun das zweite Glied der Formel (α). Bei der Berechnung des Integrals der magnetischen Kraft muss das Rechteck, infolge der getroffenen Wahl der positiven Richtungen, in dem Sinne $ABCD$ durchlaufen werden, d. h. in dem Sinne, in welchem der Maxwell'sche Korkzieher rotieren muss, um in der Richtung Ox fortzuschreiten. Die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft hat bezw. den Wert M für die Punkte der Seite AB, $N+\frac{\partial N}{\partial y}dy$ für diejenigen der Seite BC, $M+\frac{\partial M}{\partial z}dz$ für CD und N für DA, wobei zu beachten ist, dass die den Seiten CD und DA entsprechenden Posten negativ sind. Das Integral der magnetischen Kraft über das elementare Rechteck ist also durch

$$\left[\left(N+\frac{\partial N}{\partial y}dy\right)-N\right]dz+\left[M-\left(M+\frac{\partial M}{\partial z}dz\right)\right]dy=\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dydz$$

ausgedrückt. Es ist also:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}dydz=\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dydz$$

oder:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}.$$

Durch gleiches Vorgehen bei den anderen Rechtecken erhält man zwei analoge Beziehungen, die man aus der vorstehenden Gleichung direkt durch zyklische Vertauschung der algebraischen Grössen leicht ermitteln kann.

Man hat so für einen Punkt des Dielektrikums die drei Beziehungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases}$$

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

Wenden wir nun auf dasselbe Rechteck $ABCD$ die Beziehung (β) an. Im Punkte A ist die Komponente der Induktion nach der Achse Ox gleich μL und der Induktionsfluss durch das Rechteck gleich:

$$\mu L dy dz.$$

Wenn in der Zeit ∂t die Komponente L der Kraft $\mathfrak{H}$ eine Änderung ∂L erfährt, so ist die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch das Rechteck gleich:

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} dy dz.$$

Diesem ersten Gliede in der Formel (β) ist das negative Vorzeichen beizufügen; wir können dies durch Umkehrung des Sinnes, in welchem das Integral der elektrischen Kraft längs der Begrenzungslinie des Rechteckes zu nehmen ist, berücksichtigen, indem wir nämlich als positiv den Sinn $ADCBA$ annehmen. Die Tangentialkomponenten der Kraft besitzen bezw. den Wert: Z auf der Seite AD, $Y + \frac{\partial Y}{\partial z} dz$ auf DC, $Z + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$ auf CB und Y auf BA, und das Integral der elektrischen Kraft über die Linie $ADCBA$ ist, da die den Seiten CD und BA entsprechenden Posten als negativ angesehen werden müssen, durch den Ausdruck gegeben:

$$\left[\left(Y + \frac{\partial Y}{\partial z} dz\right) - Y\right] dy + \left[Z - \left(Z + \frac{\partial Z}{\partial y} dy\right)\right] dz = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dy dz.$$

Y und Z sind hierbei in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt, während F in der Formel (β) in elektromagnetischen Einheiten wiedergegeben ist. Da das Verhältnis zwischen der elektromagnetischen und der elektrostatischen Einheit der elektrischen Kraft gleich $\frac{1}{v}$ ist, so giebt die Beziehung (β), auf das Rechteck $ABCD$ angewandt:

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} dy dz = v \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dy dz$$

oder:

$$\frac{\mu}{v} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Analoge Berechnungen auf die zwei zu den Achsen Oy und Oz normalen elementaren Rechtecke anwendend, erhält man die drei Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{\mu}{v} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{\mu}{v} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{v} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

Aus den beiden Systemen der partiellen Differentialgleichungen (1) und (2), welche das Gleichgewicht und die Variationen sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Kraftflusses in einem isotropen, vollkommen isolierenden Medium bestimmen, geht hervor, dass eine in einem beliebigen Punkte des Mediums erzeugte Variation sich im Raume in ähnlicher Weise fortpflanzt, wie eine Gleichgewichtsstörung in den elastischen Körpern. Wir wollen die vollständige Behandlung dieses Gegenstandes unterlassen und uns auf die Betrachtung eines besonderen Falles beschränken.

133. Besonderer Fall. Fortpflanzung durch ebene Wellen. — Nehmen wir an, die elektrische Kraft F sei in jedem Punkte parallel zur Achse Oz und besitze in einem und demselben Augenblicke denselben Wert für alle Punkte einer zur Achse Ox senkrecht gelegenen Ebene; die Kraft F ist alsdann eine Funktion von x und t und ist unabhängig von y und z, man hat nämlich:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = F = \varphi(x, t).$$

Demnach ergeben die Gleichungen (1):

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\varepsilon}{v}\dfrac{\partial Z}{\partial t}. \end{cases}$$

und die Gleichungen (2):

$$\text{(2a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial N}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Betrachten wir speziell die Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{\mu}{v}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Durch Differentiation der zweiten Gleichung nach x und der ersten nach t erhalten wir:

$$\frac{\mu}{v}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial t};$$

und ferner unter Berücksichtigung, dass zufolge der ersten der Gleichungen (2a)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

ist, und durch Elimination des Ausdruckes $\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t}$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist identisch mit derjenigen, die in der Akustik für die Fortpflanzung des Schalles in einem zylindrischen Rohre, in einer elastischen Saite und dergl. vorkommt. Ist f eine beliebige willkürliche Funktion, so ist einleuchtend, dass

$$Z = f\left(x \pm \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

ein partikuläres Integral der Gleichung (3) ist. — Und zwar, wenn wir mit f' und f'' den ersten und den zweiten Differentialquotienten von f bezeichnen, ist

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f', \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = \pm\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}f',$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = f'', \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu}f'',$$

sodass die Gleichung (3) erfüllt ist.

Da die Funktion f willkürlich ist, so sind die Ausdrücke:

$$Z_1 = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right),$$

$$Z_2 = f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right),$$

wobei f_1 und f_2 beliebige Funktionen sind, Integrale der Gleichung (3). Ihre Summe:

$$Z = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right) + f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right), \tag{4}$$

ist dann deren allgemeines Integral. Die beiden willkürlichen Funktionen werden durch die Anfangsbedingungen, d. h. durch Einführung der Werte von Z und $\frac{\partial Z}{\partial t}$ für $t = 0$ bestimmt.

Um uns über die Bedeutung der allgemeinen Fortpflanzungsgleichung Rechenschaft zu geben, wird es zweckmässig sein, die beiden vorher betrachteten partikulären Integrale getrennt zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst das Integral:

$$Z = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right).$$

Es seien x, t und x', t' zwei Paare von Werten, welche der Gleichung:

$$x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t = x' - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t'$$

oder:

$$x' - x = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} (t' - t)$$

Genüge leisten.

Die Kraft Z wird am Ende der Zeit t' in der Entfernung x' vom Koordinaten-Mittelpunkte O denselben Wert haben, wie am Ende der Zeit t in der Entfernung x. Man kann also sagen, dass der Wert der Kraft Z sich in der Zeit $t' - t$ von der Entfernung x zu der Entfernung x' übertragen hat, d. h. dass eine Änderung des Wertes von Z, welche in der um x von dem Koordinaten-Mittelpunkte entfernt und zur Achse Ox senkrecht gelegenen Ebene erzeugt wird, sich in dieser nach der Zeit $t' - t$ in der Entfernung x' bemerkbar macht. Mit anderen Worten, die Kraft Z pflanzt sich in der Richtung der Achse Ox mit einer konstanten Geschwindigkeit fort, deren Wert gleich

$$\frac{x' - x}{t' - t} = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ist.

Wenn wir, wie es bei dem Studium der Fortpflanzung der schwingenden Bewegungen üblich ist, als *Wellenfläche* jene Fläche definieren, in deren sämtlichen Punkten in einem und demselben Augenblicke die sich fortpflanzende Grösse denselben Wert hat, so können wir sagen, dass die Kraft sich in diesem Falle durch ebene Wellen in der zu ihrer Ebene senkrechten Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ausbreitet.

Ganz analoge Betrachtungen gelten auch für das andere partikuläre Integral $Z = f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$.

Dieses stellt eine ebene Welle dar, welche sich nach denselben Gesetzen, aber in entgegengesetzter Richtung wie die vorige fortpflanzt.

Aus diesen Betrachtungen über die beiden Funktionen f_1 und f_2 geht hervor, dass das allgemeine Integral (4) das gleichzeitige Vorhandensein zweier Wellensysteme darstellt, welche sich längs der Achse Ox in entgegengesetztem Sinne mit denselben Geschwindigkeiten fortpflanzen.

Sind f_1 und f_2 periodische Funktionen der Zeit mit der Periode T und der Frequenz $n = \frac{1}{T}$, so ist die in einer Periode zurückgelegte Entfernung:

(5) $$\lambda = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} T;$$

sie heisst: *Wellenlänge.* Zwei in der Entfernung λ von einander gelegene Punkte sind in jedem Moment in derselben Schwingungsphase.

Aus den Gleichungen (1a) und (2a) können wir fernerhin den Wert der magnetischen Kraft ermitteln. Nach der ersten und dritten der Gleichungen (2a) sind die Komponenten L und N unabhängig von der Zeit, und folglich ist, unter der Annahme, das Feld sei vor dem Eintreten der betrachteten Störungen in Ruhe gewesen, und es seien keine freien magnetischen Massen vorhanden:

$$L = 0, \qquad N = 0.$$

Dieselben Gleichungen, aus denen wir Z durch Elimination von M ermittelt haben, geben durch Elimination von Z:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

Wir schliessen daraus, dass die magnetische Kraft in jedem Punkte parallel zur Achse Oy gerichtet ist und einen gleichen Wert für alle Punkte einer zur Achse Ox senkrechten Ebene besitzt; die Kraft pflanzt sich durch ebene Wellen in der positiven und in der negativen Richtung der Achse Ox mit derselben Geschwindigkeit $\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ fort.

Die elektrischen und die magnetischen Kräfte stehen also zu einander senkrecht und sind beide transversal in bezug auf die Fortpflanzungsrichtung; sie breiten sich durch Schwingungen aus, genau so, wie es bei den Deformationen in einem elastischen Medium und bei den Schallschwingungen der Fall ist.

Noch grösser ist die Analogie mit der Fortpflanzung des Lichtes und der strahlenden Wärme, weil die Wärme- und die Lichtschwingungen ebenfalls wie die elektromagnetischen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung und nicht parallel zu derselben, wie die Schwingungen bei dem Schalle, erfolgen.

Der besondere Fall, den wir betrachtet haben, entspricht genau der Fortpflanzung eines in einer bestimmten Ebene polarisierten Lichtstrahles.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem elektromagnetischen Felde hängt von der Dielektrizitätskonstanten und von der magnetischen Permeabilität des Mediums ab. In dem Vakuum, in der Luft, und allgemein in den Gasen, für welche $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ gilt, ist diese Geschwindigkeit gleich dem konstanten Faktor v, welcher dem Verhältnisse der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit der Stromstärke entspricht und die Dimensionen einer Geschwindigkeit besitzt*).

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

134. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem beliebigen Medium. — Wenn das Medium kein vollkommener Isolator ist, so sind auch die in demselben entstehenden Leitungsströme zu berücksichtigen, und wir werden dabei voraussetzen, dass die Verschiebungs- und die Leitungsströme sich superponieren.

Bezeichnen wir mit u_x, u_y und u_z die nach drei orthogonalen Koordinatenachsen gebildeten Komponenten der Stromdichte, d. h. des durch die Flächeneinheit fliessenden Leitungsstromes, in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt. Der durch das Rechteck $ABCD$ (Fig. 152) fliessende Leitungsstrom ist gleich $u_x dydz$; in analoger Weise sind die Leitungsströme durch die unendlich kleinen, zu den Achsen Ox und Oy senkrechten Rechtecke bezw. $u_y dxdz$ und $u_z dxdy$; in diesem Falle führt die Beziehung (α) zu den Gleichungen:

$$(1') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi u_x = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi u_y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi u_z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) bleiben unverändert.

Bedeutet c die spezifische Leitfähigkeit des Mediums in elektromagnetischen Einheiten, so ist, da die Dichte in einem Punkte [54] das Produkt der spezifischen Leitfähigkeit mit der elektrischen Kraft ist,

$$u_x = cvX, \qquad u_y = cvY, \qquad u_z = cvZ,$$

wobei auch die Kraftkomponenten in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt sind; demnach können die Gleichungen (1') auch wie folgt geschrieben werden:

$$(1'') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi cvX = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi cvY = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi cvZ = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases}$$

In dem allgemeinen Falle, in welchem das Medium nicht isotrop ist, sind ε und μ als Variable anzusehen.

135. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen leitenden Medium. — Wir haben den Grenzfall eines vollkommen dielektrischen Mediums behandelt und wollen nun den entgegengesetzten Grenzfall eines vollkommen leitenden Mediums betrachten. Weil

dann c sehr gross ist, wird man auch durch kleine Werte der elektrischen Kraft bedeutende Leitungsströme hervorbringen, und folglich wird man die Verschiebungsströme im Vergleiche zu den Leitungsströmen vernachlässigen können. Die Gleichungen (1″) gehen über in:

$$(1''') \qquad \begin{cases} 4\pi c v X = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi c v Y = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi c v Z = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y}, \end{cases}$$

während die Gleichungen (2) unverändert bleiben.

In dem besonderen Falle, in welchem die Kraft F in jedem Punkte parallel zur Achse Oz ist und den gleichen Wert für alle Punkte einer senkrecht zur Achse Ox gelegten Ebene besitzt, d. h. in welchem

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = F = \varphi(x, t)$$

ist, reduzieren sich die Gleichungen auf:

$$(1'''a) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi c v Z = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

und:

$$(2a) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial N}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Durch dasselbe Verfahren, welches wir bereits für den Fall eines dielektrischen Mediums eingeschlagen haben, finden wir folgende partielle Differentialgleichung:

$$(6) \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c\mu}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$

welche das Problem löst und identisch mit der Gleichung ist, welche in der Thermodynamik für die Fortpflanzung der Wärme in den leitenden Körpern gilt. Die Kraft Z pflanzt sich also in diesem Falle wie die Temperatur fort.

Auch ohne dass die Integration der Gleichung (6) ausgeführt wird, genügen diese Betrachtungen zur Kennzeichnung der Natur der Erschei-

nung in diesem besonderen Falle. Wenn Z der Wert der Kraft zur Zeit t in einer senkrecht zur Achse Ox im Abstande x vom Koordinaten-Mittelpunkte gelegten Ebene ist, so ist es nicht möglich, eine andere Ebene in der Entfernung x' zu finden, in welcher die Kraft nach einer Zeit $t' - t$ eben denselben Wert Z besitzt. Es handelt sich hierbei also nicht um die Fortpflanzung eines bestimmten Wertes der Kraft mit konstanter Geschwindigkeit, sondern um eine sprungweise oder stufenweise Fortpflanzung, wie es etwa diejenige der Wärme durch eine Wandung ist.

Wenn wir auch hier annehmen, dass Z für einen bestimmten Wert von x eine periodische Funktion der Zeit sei, so wiederholt sich diese periodische Variation doch nicht mehr nach demselben Gesetze in aufeinander folgenden gleichen Entfernungen. Es folgt daraus, dass die Ausbreitung durch Wellen in diesem Falle unmöglich ist; die Leiter sind unfähig, die elektrischen und magnetischen Schwingungen zu übertragen, und verhalten sich in bezug auf solche Schwingungen wie undurchsichtige Körper in bezug auf das Licht.

Wir haben so die beiden Grenzfälle hinsichtlich des Mediums, in welchem die Fortpflanzung stattfindet, behandelt. — Im allgemeinen ist das Medium weder ein vollkommener Isolator, noch ein vollkommener Leiter; es sind also zwischen diesen beiden Grenzfällen unendlich viele andere Fälle zu betrachten, in welchen die Verschiebungs- und die Leitungsströme berücksichtigt werden müssen. Die Fortpflanzung findet dann nach anderen Gesetzen statt, die nicht mehr so einfache Formen annehmen, aber stets aus den Maxwell'schen Grundgleichungen abgeleitet werden können.

136. Maxwell'sche Hypothese über die Beschaffenheit des Lichtes und deren hauptsächlichste experimentelle Bestätigungen. — Schon bevor Maxwell seine epochemachende Theorie entwickelte, waren direkte Messungen der Lichtgeschwindigkeit und des Verhältnisses v der elektromagnetischen zur elektrostatischen Stromeinheit ausgeführt worden, und es war bekannt, dass ihre Werte als einander gleich angenommen werden können, da dieselben sich nicht um grössere Beträge von einander unterscheiden als um die Differenzen zwischen den einzelnen von verschiedenen Forschern bestimmten Werten selbst. Man wurde schon damals auf den Gedanken gebracht, dass diese Gleichheit nicht zufällig sei und ein Zusammenhang zwischen der Ausbreitung des Lichtes und der Fortpflanzung der Elektrizität bestehe.

Die Maxwell'sche Theorie erklärt nun die Fortpflanzung der elektromagnetischen Erscheinungen durch eine Wirkung, die sich durch ein den ganzen Raum ausfüllendes Medium überträgt; die Wellentheorie des Lichtes

setzt ebenfalls nur die Existenz eines solchen Mediums voraus. Ferner haben wir gesehen, dass die elektromagnetischen Schwingungen sich in einem vollkommen dielektrischen Medium, d. h. in einem Medium, in welchem keine Energieverwandlung in Joule'sche Wärme stattfindet, nach demselben Gesetze ausbreiten, wie das Licht in der Luft.

Es liegt also nahe, nach Maxwell anzunehmen, dass die elektromagnetischen, wie die Licht-Schwingungen sich in einem und demselben Medium, dem Äther, fortpflanzen, und ferner, dass das Licht selbst eine elektromagnetische Erscheinung sei, d. h. dass die das Licht bildenden Schwingungen nichts anderes seien als elektromagnetische Schwingungen.

Sehen wir nun zu, welche experimentellen Bestätigungen diese Hypothese findet. Vor allem müssen, wenn das Licht eine elektromagnetische Erscheinung ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und die der elektromagnetischen Schwingungen die gleichen sein.

Für den Äther, die Luft oder allgemein ein Gas, wo $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ ist, muss v die Lichtgeschwindigkeit sein, und wir haben schon erwähnt, dass dies durch den Versuch genügend bestätigt ist.

Der mittlere Wert von v ist:

$$v = 3 . 10^{10} \text{ cm.} = 300\,000 \text{ km. in der Sekunde.}$$

Für ein beliebiges durchsichtiges Medium ist allgemein die magnetische Permeabilität $\mu = 1$, während die Dielektrizitätskonstante ε verschieden von *Eins* sein kann; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Schwingungen wird also durch $\frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}$ ausgedrückt sein, d. h. sie ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel des spezifischen Induktionsvermögens der Substanz. Andererseits ist die Lichtgeschwindigkeit in den verschiedenen Medien nach der Wellentheorie des Lichtes umgekehrt proportional dem Brechungsexponenten des Mediums; folglich muss, wenn die Maxwell'sche Theorie richtig ist, die Dielektrizitätskonstante eines durchsichtigen Mediums gleich dem Quadrat seines Brechungsexponenten sein. — Dies wird durch den Versuch für einige, aber nicht für alle Körper bestätigt.

Die Thatsache, dass die soeben aus der Maxwell'schen Hypothese gezogene Folgerung mit den Ergebnissen der Erfahrung nicht vollständig übereinstimmt, schwächt die Maxwell'sche Theorie keineswegs ab, weil Wellen von verschiedener Frequenz bei beiden Erscheinungen auftreten. Es hat ja auch der Brechungsexponent einer Substanz verschiedene Werte für Lichtstrahlen verschiedener Farbe, und zwar wächst er mit der Frequenz der Schwingungen, was schon durch die Thatsache bewiesen

wird, dass bei der Dispersion von Lichtstrahlen diejenigen mit kürzerer Wellenlänge im allgemeinen eine stärkere Brechung zeigen.

Wir haben schon erwähnt, dass ein Leiter unfähig ist, die elektromagnetischen Schwingungen fortzuleiten; nun müssen nach der Maxwell'schen Theorie alle gute Leiter für Elektrizität undurchsichtig, d. h. für Lichtstrahlen nicht durchlässig sein. Auch diese Folgerung ist im Prinzip durch die Erfahrung bestätigt. So sind im allgemeinen die Metalle und die anderen gut leitenden Körper, abgesehen von den Elektrolyten, in welchen die Fortleitung der Elektrizität nach ganz besonderen Gesetzen unter gleichzeitigem Auftreten anderer Vorgänge stattfindet, undurchsichtig. Dagegen sind im allgemeinen die durchsichtigen festen Körper gute Isolatoren; diese Regel weist aber viele Ausnahmen auf, da viele dielektrische Körper undurchsichtig sind. Dies darf jedoch keine Verwunderung erregen, und widerspricht der Maxwell'schen Theorie nicht, weil die Lichtschwingungen eine viel kürzere Periode als die elektromagnetischen Schwingungen haben, und weil Körper, welche sich für gewisse Schwingungen als undurchlässig verhalten, für Schwingungen mit grösserer Wellenlänge durchlässig sein können.

---

§ 2.

Hertz'sche Versuche.

137. Zweck der Versuche. — Die Maxwell'sche Theorie hat eine vollkommene Bestätigung gefunden durch die von Heinrich Hertz im Jahre 1887 an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe begonnenen Versuche, welche mit der ganzen Reihe seiner späteren belangreichen Arbeiten zur Zeit einen eigenen Zweig der experimentellen Naturwissenschaft für sich bilden. — Wir wollen nicht eine eingehende Prüfung der Arbeiten von Hertz und seiner Nachfolger durchführen; es genügt die Erwähnung der Natur dieser Versuche, um zu zeigen, dass die elektromagnetische Lichttheorie thatsächlich auf experimentellen Grundlagen beruht.

Der Zweck der Versuche war vor allem, die Existenz eines Mediums nachzuweisen, welches Sitz und Vermittler der elektrischen und magnetischen Kräfte ist, d. h. den Beweis zu liefern, dass die Veränderungen derselben nicht plötzlich von einem zu einem anderen entfernt gelegenen Punkte übergehen, sondern dass jene sich durch den Raum mit einer bestimmten endlichen Geschwindigkeit fortpflanzen.

Die Versuche sollten ferner beweisen, dass die Fortpflanzungs-

geschwindigkeit dieser elektrischen Kräfte und des Lichtes übereinstimmen, und endlich, dass bei der Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen dieselben Erscheinungen der Reflexion, Brechung, Polarisation etc. auftreten, wie bei der Fortpflanzung des Lichtes.

Die von Hertz aufgenommenen experimentellen Untersuchungen galten also dem Studium der Ausbreitung der Veränderungen elektrischer und magnetischer Kräfte im Raume. Es schien von vornherein zweckmässig, mit periodischen Veränderungen von grosser Frequenz zu arbeiten, und mithin ergaben sich die beiden folgenden praktischen Aufgaben:

1. Elektrische Schwingungen kontinuierlich zu erzeugen, d. h. die elektrische Kraft F nach einer periodischen Funktion der Zeit variieren zu lassen. Die Frequenz der Schwingungen sollte sehr gross sein, um hinreichend kleine, innerhalb der Räume eines Laboratoriums enthaltene Wellenlängen zu erlangen.

2. Ein Mittel zu finden, um diese Schwingungen in dem dielektrischen Medium (Luft) wahrnehmen zu können.

138. Praktische Anordnung der Hertz'schen Versuche. Erreger. Resonator. — Zur Erzeugung der elektrischen Schwingungen benutzte Hertz, um grosse Frequenz zu erzielen, die Entladung eines Kondensators von kleiner Kapazität. Die oscillierende Entladung eines Kondensators ist eine Erscheinung, welche sich, obwohl in einer sehr grossen Anzahl von Schwingungen bestehend, in sehr kurzer Zeit abspielt. Durch aufeinander folgende, in sehr kleinen Zeitintervallen stattfindende Ladungen kann man eine genügend rasche Aufeinanderfolge oscillierender Entladungen erhalten, mit welchen man wie mit periodischen Schwingungen zu experimentieren vermag.

Wir wollen hier nur die von Hertz dazu benutzte Anordnung erwähnen. Sein *Oscillator* oder *Erreger* (Fig. 153) besteht aus einem kleinen Luftkondensater, gebildet aus zwei metallischen Stäbchen, welche an einer Seite in zwei in kleiner Entfernung von einander gegenüberliegenden Kügelchen a und b und an der anderen in zwei Platten A und B von passender Oberfläche endigen. Ladet man diesen Kondensator so weit, bis die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen einen gewissen Wert erreicht hat, so findet die Entladung statt, d. h. ein Funken springt

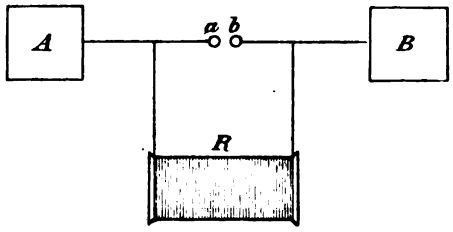

Fig. 153.

zwischen den beiden Entladungskugeln *a* und *b* über. Die Abmessungen des Apparates sind solche, dass die Ladung eine oscillierende ist. Durch Veränderung der Länge der Stäbe, d. h. des Widerstandes und der Induktanz des Stromkreises, und durch Veränderung der Grösse der Platten, d. h. der Kapazität des Kondensators, kann man die Frequenz der Entladung variieren.

Die beiden Stäbe des Oscillators stehen in Verbindung mit den Polen eines Induktionsapparates; die induzierten Ströme in der sekundären Wickelung der Spule bringen die aufeinander folgenden Ladungen des Kondensators hervor.

Man kann sich ein Bild davon, wie die Schwingungen in dem Hertzschen Erreger entstehen, durch Vergleichung dieser mit ähnlichen Erscheinungen bei den Schallwellen machen. So hat man z. B. durch mehrere rasch aufeinander folgende Bogenstriche auf einer Geigensaite, von denen jeder, bevor die von diesem erzeugten Schwingungen aufgehört haben, dem vorigen folgt, den Eindruck eines kontinuierlichen Tones; dasselbe geschieht bei den Schlaginstrumenten durch eine rasche Aufeinanderfolge von Klöppelschlägen auf die vibrierenden Membranen.

Die Erscheinung ist in unserem Falle eine vollständig analoge; die Ströme in der Spule, welche der Reihe nach die Ladungen des Kondensators hervorbringen, entsprechen den Bogenstrichen oder den Klöppelschlägen, welche die aufeinander folgenden Erregungen der Saite oder der Membrane bewirken; wie nun aber die Frequenz der Schallwellen diejenige der Schwingungen der Saite oder der Membrane und nicht diejenige, mit welchen diesen schwingungsfähigen Körpern Impulse der Reihe nach erteilt werden, ist, so ist die Frequenz der durch eine Entladung hervorgerufenen elektrischen Oscillation durch die Zustände der Strombahn und nicht durch die Stärke und Unterbrechungszahl des primären Stromes in der Spule bestimmt; ferner werden in unserem Falle, wie bei den Schallschwingungen der Ton kontinuierlich erscheint, wenn die Impulse genügend rasch erfolgen, die elektrischen Schwingungen praktisch kontinuierlich sein, wenn die Frequenz der primären Stromstösse in der Spule hinreichend gross ist.

Um die Existenz der elektromagnetischen Schwingungen wahrzunehmen, benutzte Hertz einen Apparat, welchem er den Namen *elektrischer Resonator* erteilte.

Die Wirkungsweise dieses Apparates beruht auf den Eigenschaften der von Wechselstrom durchflossenen Strombahnen bei gewissen gegenseitigen Beziehungen zwischen Kapazität, Induktanz und Widerstand [120], [122], [130].

Wir haben gesehen, dass in einem Stromkreise, in welchem der

Ohm'sche Widerstand gleich Null angenommen werden kann und zwischen der Induktanz und der Kapazität die Beziehung

$$4\pi^2 n^2 LC = 1$$

besteht, auch sehr kleine E. M. KK. erhebliche Stromstärken zur Folge haben können, welche, einmal erzeugt, sehr lange weiter fortdauern; diese Erscheinung beruht auf dem Auftreten vieler aufeinander folgender Ladungen und Entladungen des Kondensators ohne Energievergeudung, d. h. auf einer periodischen Umsetzung von elektrischer in magnetische Energie und umgekehrt. Die Stromfrequenz in diesem Stromkreise ist:

$$n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{7}$$

Ist der Widerstand r des Stromkreises nicht gleich Null, jedoch sehr klein, so ist auch die in Wärme gemäss dem Joule'schen Effekt umgesetzte Energiemenge sehr gering, die Erscheinungen werden sich in grosser Annäherung an den ideellen Grenzfall abspielen, und die Stromfrequenz wird noch als durch die Formel (7) ausgedrückt angenommen werden können.

Es bedarf, um ein Gebilde zu erhalten, welches fähig ist, auf elektrische Schwingungen von grosser Frequenz zu resonieren, einer sehr kleinen Kapazität.

Eine von den von Hertz gewählten Anordnungen besteht in einem einfachen Draht aMb (Fig. 154), welcher in einem Kügelchen und einer Spitze, oder in zwei Kügelchen endigt.

Das System bildet einen Kondensator mit sehr kleiner Kapazität, dessen Belegungen durch einen metallischen Bogen verbunden sind.

Geben wir dem Stromkreise aMb in dem elektromagnetischen Felde eine solche Lage, dass dessen Ebene senkrecht zu der Richtung der magnetischen Kraft steht, so bringt eine Änderung dieser Kraft eine Änderung des Flusses durch den Stromkreis und mithin eine E. M. K. in demselben hervor. Sind ferner die Änderungen der magnetischen Kraft periodisch und besitzen dieselben eine passende Frequenz, so addieren sich die im Stromkreise erzeugten E. M. KK., und man kann zwischen a und b Potentialdifferenzen erreichen, welche im Dunkeln sichtbare Fünkchen erzeugen. Dieser Apparat giebt uns also ein Mittel an die Hand, elektromagnetische Schwingungen von bestimmter Frequenz im Raume wahrzunehmen und nachzuweisen.

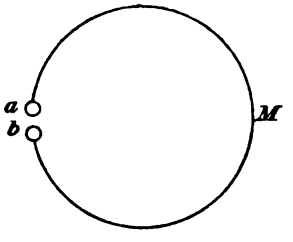

Fig. 154.

Die Wirkungsweise des elektrischen Resonators ist vollständig analog derjenigen der Resonatoren in der Schalllehre. Eine gespannte Saite, welche einen Grundton von bestimmter Höhe und Frequenz zu geben vermag, wird durch Resonanz mit einem anderswo in der Umgebung erzeugten Tone, der selbst schwach, aber im Einklang mit dem Eigentone der Saite ist, zum Mitschwingen veranlasst; die aufeinander folgenden Schwingungen der Saite addieren sich, vergrössern ihre Weite und geben in deutlicher Weise den Ton wieder. Genau so übertragen sich die elektromagnetischen Schwingungen auf den Resonator und summieren sich, bis sie merkliche Wirkungen hervorbringen.

Die elektrischen Resonatoren können vielfach gestaltet sein; man kann sogar sagen, dass ein beliebiges nicht vollständig geschlossenes System von Leitern mit kleinem Widerstand und passender Kapazität und Induktanz einen Resonator bilden kann.

Einer von den von Hertz am meisten benutzten Resonatoren ist der geradlinige: das Gegenstück zu dem oben beschriebenen Oscillator. Zwei Stäbe (Fig. 155), in derselben Geraden liegend, endigen in zwei gegenüberliegenden Kügelchen a' und b'; die entgegengesetzten Enden der Stäbe tragen zwei metallische Platten A' und B', von deren Flächeninhalte die Kapazität des Systems abhängt.

Dieser Resonator bildet einen Stromkreis, der zweimal unterbrochen ist, nämlich zwischen a' und b' und zwischen A' und B', und kann mit einem Stromkreise verglichen werden, in welchen zwei Kondensatoren hintereinander geschaltet sind. In diesem Falle ist die Richtung, die die elektrische Kraft besitzen muss, um Resonanz hervorzubringen, unmittelbar bestimmt; diese Richtung ist diejenige der beiden Stäbchen.

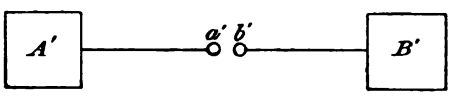

Fig. 155.

Bei einem Erreger der oben geschilderten Form (Fig. 153) sind die elektrischen Schwingungen parallel zur Richtung ab des Erregers selbst; diese aber bringen magnetische Schwingungen hervor, welche längs geschlossener Linien in zu ab senkrechten Ebenen erfolgen, die magnetischen Schwingungen bringen ihrerseits andere zu ihnen senkrechte, d. h. zu den vorigen parallele elektrische Schwingungen hervor u. s. w. Auf diese Weise findet die Fortpflanzung der Schwingungen statt. Befindet sich der Resonator (Fig. 155) in dem Medium, in welchem sich die Schwingungen ausbreiten, mit seiner Achse $a'b'$ parallel zur Achse des Erregers, d. h. parallel zur Richtung der elektrischen Kraft, so entstehen zwischen a' und b' Potentialdifferenzen, welchen die Resonanz ihre Entstehung verdankt; ist dagegen die Achse des Resonators senkrecht zur Achse des Er-

regers, so kann die elektrische Kraft, weil senkrecht zur Richtung $a'b'$, keine Potentialdifferenz hervorrufen, und der Resonator kann nicht mehr wirken.

Bei anderen Versuchen benutzte Hertz als Resonator und Erreger zwei einfache Messingröhren, an den Enden durch zwei Halbkugeln geschlossen und in geringem gegenseitigem Abstande koaxial aufgestellt.

In diesen Fällen ist es immer möglich, die Kapazität und die Induktanz des Erregers und des Resonators ungefähr zu berechnen und so einen angenäherten Wert der Frequenz der von ersterem erzeugten Schwingungen, auf welche letzterer resonieren soll, zu ermitteln.

Hertz erreichte bei den vorher beschriebenen Anordnungen des Erregers und des Resonators Wellenlängen von 3 bis 4 m.; bei der letzten Anordnung konnte er noch kleinere Wellenlängen erreichen, sogar eine Länge von 30 cm., welcher eine Frequenz von 10^9 entspricht.

Die von Hertz bei seinen Versuchen verwendeten elektrischen Schwingungen besitzen eine viel geringere Frequenz als die Lichtschwingungen, da die Frequenz des grünen Lichtes, die als mittlere Frequenz des Lichtspektrums angenommen werden kann, sich auf ungefähr 600.10^{12} beläuft, d. h. auf etwa ein Millionfaches derjenigen der Hertzschen Schwingungen.

139. Experimentelle Ergebnisse. — Wir wollen im Folgenden einige der wichtigsten Ergebnisse, zu denen Hertz auf experimentellem Wege unter Benutzung der oben beschriebenen Erreger und Resonatoren gelangte, erwähnen.

Vor allem konstatierte Hertz, dass die elektromagnetischen Schwingungen sich thatsächlich durch das Dielektrikum fortpflanzen. Zu diesem Zwecke stellte er einen Erreger und einen Resonator mit parallelen Achsen einander gegenüber auf; die beiden Apparate waren so bemessen, dass sie dieselbe Frequenz besassen, was Hertz durch geeignete Berechnungen angenähert und dann durch Korrektionen aus der gewonnenen Erfahrung genauer erreichte. Bei der Bethätigung des Erregers sprangen zwischen den Kügelchen des Resonators kleine Funken über, selbst wenn die beiden Apparate mehrere Meter weit von einander entfernt waren. Wenn zwischen dem Erreger und dem Resonator eine Platte aus einer isolierenden Substanz z. B. aus Ebonit oder trockenem Holz gestellt wurde, so blieb die Erscheinung dieselbe, aber nicht mehr, wenn eine Metallplatte oder allgemein eine Platte aus elektrisch leitendem Material sich dazwischen befand. Man gewinnt so eine erste Bestätigung der von der Maxwell'schen Theorie vorausgesehenen Thatsache, dass die elektromagnetischen Schwingungen sich durch das Dielektrikum, aber nicht

durch Leiter hindurch ausbreiten und dass die Dielektrika durchlässig und die Leiter undurchlässig für solche Schwingungen sind.

Nach der Feststellung der Thatsache, dass die elektromagnetischen Schwingungen im Dielektrikum vorhanden sind, war es wichtig, nachzuweisen, dass dieselben, wie die Lichtschwingungen, sich wellenförmig mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Wir haben gesehen, dass eine metallische Platte die elektromagnetischen Schwingungen nicht durchlässt, genau so wie ein Spiegel das Licht oder eine unelastische Wand den Schall in ihrer Fortpflanzung hemmen; es müssen dann aber auch die elektromagnetischen Schwingungen an der Oberfläche der Leiter reflektiert werden, wie es beim Licht und beim Schall in analoger Weise geschieht. Stellt man den Versuch so an, dass der reflektierte Strahl mit dem einfallenden zusammenfällt, so werden sich im elektromagnetischen Felde Interferenzerscheinungen kundgeben, analog denjenigen, die bei der Ausbreitung der Licht- und Schallwellen auftreten.

Hertz wies dies experimentell nach durch einen Versuch, welcher der Interferenz der Schallwellen analoge Erscheinungen veranlasst. Trifft ein Schallstrahl gegen eine zu seiner Fortpflanzungsrichtung senkrechte ebene Wand, so superponieren sich die reflektierten Wellen mit den ankommenden und erzeugen stehende Wellen mit festen Punkten (sogenannten *Bäuchen*), an welchen die Schwingungen sich addieren und dadurch die maximale Intensität erhalten wird, und anderen festen Punkten (sogenannten *Knoten*), an welchen die Schwingungen entgegengesetzt sind und man eine minimale Intensität erhält. Auf der reflektierenden Wandung hat man einen Knotenpunkt, diesem folgt nach rückwärts ein Bauch, dann ein Knoten und so weiter abwechselnd: der Abstand zwischen zwei folgenden Knoten oder Bäuchen ist gleich einer halben Wellenlänge.

Hertz konnte einen ähnlichen Versuch anstellen, indem er eine grosse Zinkplatte gegenüber dem vertikal angeordneten Erreger aufstellte; mit dem Resonator untersuchte er dann den Raum zwischen dem Erreger und der Platte und nahm die Existenz von Knoten und Bäuchen wahr. Da diese sich nicht anders als durch die Interferenz der reflektierten mit den einfallenden Wellen erklären lässt, so schliesst man daraus, dass die elektrischen Schwingungen sich thatsächlich in Wellenform fortpflanzen. Durch die Messung der Entfernung zwischen zwei Knoten oder zwei Bäuchen bestimmte Hertz die Wellenlänge und vermochte, da er durch die Abmessungen des Resonators einen angenäherten Wert der Frequenz kannte, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auszurechnen, welche er mit der bei solchen Versuchen erreichbaren Genauigkeit gleich derjenigen des Lichtes fand.

Diese Ergebnisse wurden von allen späteren Forschern, welche die Versuchsbedingungen noch verbesserten, bestätigt.

Die elektrischen Schwingungen pflanzen sich also genau in derselben Weise wie die Lichtstrahlen fort; deshalb nannte sie Hertz *Strahlen elektrischer Kraft.*

Der eben erwähnte Versuch bewies uns, dass die Metalle die elektrischen Strahlen reflektieren. Es folgt daraus, dass es sich durch Anwendung von hohl gewölbten Spiegeln erreichen lässt, dass die elektrischen Strahlen sich in einer bestimmten Richtung fortpflanzen, wodurch ihre sonst mit der Entfernung vom Strahlungsmittelpunkt rasch zunehmende Abschwächung erheblich vermindert werden kann.

Bei den Hertz'schen Versuchen waren die beiden Stäbe a und b des Erregers in der Brennlinie O eines zylindrischen Spiegels mit parabolischer Direktrix angeordnet, welcher aus einer von einem passenden Holzrahmen gehaltenen Zinkplatte gebildet war.

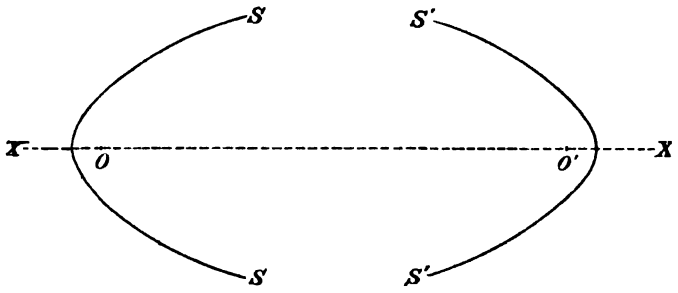

Fig. 156.

In der Brennlinie O' eines identischen Spiegels befanden sich die beiden Stäbe des Resonators; die Spiegel wurden mit den Brennlinien parallel einander gegenüber gestellt. Damit der Experimentierende frei arbeiten konnte, ohne sich zwischen die Spiegel stellen zu müssen, wurden die Spule des Induktionsapparates und die Entladungskügelchen des Resonators in den Raum ausserhalb beider Spiegel gebracht. Die Fig. 157, welche einen Schnitt des Spiegels S' mit der Brennebene darstellt, zeigt diese Anordnung. Wenn die Gesetze für die elektrischen Schwingungen dieselben wie für die Lichtstrahlen sind, so werden die von dem Erreger erzeugten Strahlen durch den Spiegel SS parallel zur Ebene XX der Brennlinien reflektiert werden und nach der Reflexion durch den Spiegel $S'S'$ nach der Brennlinie, in welcher sich der Resonator befindet, konvergieren.

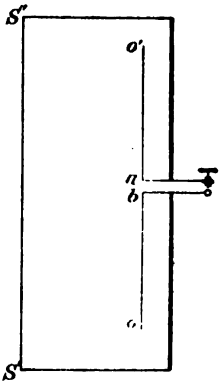

Fig. 157.

Durch eine derartige Anordnung vermochte Hertz das Vorhandensein elektrischer Strahlen in einer Entfernung von 15 bis 20 m. und sogar durch Mauerwände hindurch wahrzunehmen.

Die Verwendung von Hohlspiegeln von der Gestalt parabolischer Zylinder, welche im Raume Bündel von elektrischen Strahlen in einer bestimmten Richtung erzeugen, gestattet für die Hertz'schen Schwingungen die Wiedergabe vieler der Versuche, welche für die Lichtstrahlen seit langer Zeit bekannt sind.

Wir können vor allem kontrolieren, dass die Ausbreitung der elektrischen Strahlen eine geradlinige ist. In der That, wenn man die Spiegel so, wie vorhin erwähnt, stellt und einen metallischen Schirm in den Raum $SS'SS'$ (Fig. 156) zwischen die Spiegel schiebt, so schwächen sich die Funken am Resonator nach und nach ab und hören vollständig auf, wenn der Schirm den grössten Teil dieses Raumes einnimmt, d. h. wenn er den Durchgang der parallelen geradlinigen Strahlen zwischen den beiden Spiegeln verhindert. Wird der Schirm ausserhalb des Raumes $SS'SS'$ gehalten, so übt er keine Wirkung auf die Fünkchen am Resonator aus.

Wenn wir vor eine vertikal angeordnete metallische Wand yy (Fig. 158) den Oscillator derart stellen, dass die dessen Achse enthaltende Ebene XX einen gewissen Winkel i mit der zu der Wand senkrechten Ebene NX bildet, so werden wir im Resonator die grösste Wirkung erreichen, wenn derselbe so angeordnet ist, dass die dessen Achse enthaltende Ebene XX' die Vertikale X enthält und mit der Ebene XN den Winkel $r = i$ bildet.

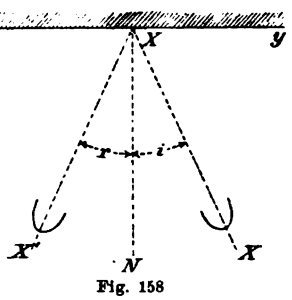

Fig. 158

Dies bestätigt im Weiteren die Ergebnisse der vorher erwähnten Versuche bezüglich der Reflexion der elektrischen Strahlen.

Hertz stellte ferner Versuche an über die Brechung der elektrischen Strahlen und beobachtete, dass ein zwischen die Spiegel gestelltes Prisma aus sogenanntem Hartpech mit einem brechenden Winkel von nahezu 30° das Auftreten der Funken am Resonator beeinträchtigte; die Funken leuchteten wieder auf, als er den Resonator derart verschob, dass dessen Ebene einen bestimmten Winkel mit der Ebene des Erregers bildete. Hertz vermochte auf diese Weise nicht nur die Brechung der elektrischen Strahlen zu konstatieren, sondern auch durch Messung des Ablenkungswinkels den Brechungsexponenten des benutzten Materials für diese Strahlen zu bestimmen.

Wir haben schon bemerkt, dass die Richtung der elektrischen Kraft

bei den von dem Hertz'schen Erreger erzeugten Schwingungen stets parallel zur Richtung der Stäbchen des Erregers ist, d. h. dass die Schwingungen nur in einer bestimmten Richtung stattfinden, wie es bei dem polarisierten Lichte der Fall ist. Man wird also mit den Apparaten von Hertz ähnliche Versuche anstellen können, wie in der Optik über die Polarisation.

Es seien die Spiegel mit parallelen Brennlinien wie vorhin vertikal aufgestellt, und es werde zwischen dieselben ein Holzrahmen eingeschoben, welcher mit einander parallelen und gleich weit von einander entfernten Kupferdrähten besponnen ist.

Ist der Rahmen derart angeordnet, dass die Richtung der Drähte die Richtung der Schwingungen, d. h. die Richtung der Brennlinien der Spiegel senkrecht kreuzt, so merkt man keine Schwächung der sekundären Funken. Dreht man aber den Rahmen um 90°, sodass die Drähte parallel zur Schwingungsrichtung sind, so verschwinden die Funken am Resonator vollständig; bei einer dazwischen liegenden Stellung des Rahmens werden die Funken geschwächt. Je nach der Lage, in welcher sich der Rahmen befindet, verhält sich derselbe also wie eine durchlässige, wenig durchlässige oder undurchlässige Platte. Wir können uns leicht diesen Umstand erklären. Die elektrischen Kräfte erzeugen in den zu denselben parallelen Drähten Ströme, welche die Energie der Schwingungen in Wärme umwandeln, letztere können sich somit nicht weiter fortpflanzen; sind dagegen die Drähte normal zu den Schwingungen, so sind die induzierten Ströme gering oder sie verschwinden vollkommen, und folglich pflanzen sich die Schwingungen grösstenteils weiter fort; wenn endlich die Drähte gegen die Schwingungsrichtung geneigt sind, so können wir die Schwingungen in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen die eine, parallel zu den Drähten, erlischt, und die andere, senkrecht zu denselben, sich weiter durch den Rahmen hindurch fortpflanzt. Das Verhalten des Rahmens ist demjenigen der parallel zur Krystallisationsachse geschnittenen Turmalinplatten analog, welche die in einer bestimmten Richtung polarisierten Strahlen absorbieren, aber für die in der dazu senkrechten Richtung polarisierten Strahlen durchlässig sind. Wird eine Turmalinplatte zwischen die beiden Nicholson'schen Prismen, den Polarisator und den Analysator, eingeschoben, welche mit ihren Hauptschnitten zusammenfallend angeordnet sind, derart, dass durch dieselben Licht hindurchgeht, so wird man Licht, Dunkelheit oder geschwächtes Licht haben, je nachdem die Turmalinkrystallachse parallel, normal oder geneigt zu dem Hauptschnitte der Prismen ist.

Kreuzt man die beiden parabolischen Spiegel, sodass ihre Achsenebenen senkrecht zu einander stehen, so erhält man am Resonator keine

Funken; schiebt man aber den Drahtschirm zwischen beide Apparate, so werden keine Funken auftreten, so lange die Richtung der Drähte parallel zu derjenigen des Erregers oder des Resonators ist, während die Funken wieder hervorgerufen werden, wenn der Rahmen gedreht wird. Man hat die grösste Wirkung, wenn die parallelen Drähte des Rahmens gegen die Richtung des Erregers und Resonators um 45^0 geneigt sind.

Auch diese Versuche können wir leicht mit der Theorie in Einklang bringen. Bei den gekreuzten Spiegeln sind die Schwingungen senkrecht zur Richtung des Resonators und können nicht auf diesen einwirken, während die vom Erreger ausgehenden Strahlen, wenn der Rahmen sich dazwischen in geneigter Lage befindet, von diesem in zwei Komponenten zerlegt werden, die eine parallel, die andere normal zur Drahtrichtung. Die erste wird absorbiert, die zweite pflanzt sich fort, geneigt gegen die Richtung des Resonators, und kann eine zu dieser parallele Komponente haben, die auf den sekundären Leiter zu wirken vermag. Die Wirkung ist natürlich ein Maximum, wenn das Drahtgitter unter 45^0 gegen die beiden Brennlinien geneigt ist.

Diese Erscheinung ist vollkommen analog derjenigen, die man bei zwei gekreuzten Nicholson'schen Prismen beobachten kann; durch diese geht kein Licht hindurch; wird aber dazwischen eine Turmalinplatte eingeschoben, so bleibt das Feld dunkel, wenn die Turmalinkrystallachse parallel zu dem Hauptschnitte eines der Prismen ist; dreht man die Platte, so wird das Feld aufgehellt, und man wird die grösste Lichtintensität haben, wenn die Turmalinkrystallachse unter 45^0 gegen die Hauptschnitte der beiden Prismen geneigt ist.

Ohne auf das Studium der Arbeiten von Hertz und anderer noch weiter einzugehen, können wir schon die erwähnten Thatsachen als genügend ansehen zur Bestätigung dafür, dass die Maxwell'sche Theorie eine wirkliche experimentelle Grundlage besitzt.

Die elektromagnetischen und die Licht-Schwingungen breiten sich beide durch ein den ganzen Raum ausfüllendes Medium aus, und die Gesetze, nach welchen diese Ausbreitung in beiden Fällen stattfindet, sind vollkommen gleichartig. Es liegt also nicht nur die Annahme nahe, dass das Medium, in welchem sich die beiden Klassen von Schwingungen fortpflanzen, dasselbe sei, sondern auch, dass zwischen denselben kein wesentlicher (also kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer) Unterschied bestehe. Licht und elektromagnetische Schwingungen sind als eine gleichartige Erscheinung zu betrachten; der Unterschied liegt nur in den Parametern der Gleichungen, welche die Gesetze der Erscheinung ausdrücken, nämlich hauptsächlich in der Frequenz und in der Amplitude der Schwingungen. In Folge dieses Unterschiedes sind die Wirkungen

und der Charakter beider Erscheinungen verschieden; und es bedarf verschiedener Mittel, um sie nachweisen und beobachten zu können, obwohl sie vom physikalischen Standpunkte aus als gleichartig erscheinen.

§ 3.

Energiewanderung in einem elektromagnetischen Felde.

140. Gleichung und Hypothese von Poynting. — Die Maxwell'schen Gleichungen und die Hertz'schen Versuche haben uns gezeigt, wie sich die elektromagnetischen Schwingungen durch den Raum fortpflanzen. Prof. J. H. Poynting untersuchte, von den Maxwell'schen Gleichungen ausgehend, in einer im Jahre 1884 herausgegebenen Abhandlung, wie und nach welchen Gesetzen die elektromagnetische Energie sich ausbreitet. Nach den Versuchen von Hertz, welche die Maxwell'sche Theorie vollständig bestätigen, gewannen die Poynting'schen Ableitungen eine sehr grosse Bedeutung.

Wir werden auch zu den Ergebnissen Poynting's gelangen können, wenn wir von den Maxwell'schen Gleichungen in der einfacheren Form ausgehen, die wir ihnen oben gegeben haben.

Wir wollen zunächst die Energiemenge berechnen, welche in der Zeiteinheit in den Raum eintritt, der von einer in dem elektromagnetischen Felde beliebig gewählten geschlossenen Fläche begrenzt ist. Diese Energiemenge ist gleich der Zunahme der in diesem Raume vorhandenen elektrischen und magnetischen Energie, vermehrt um die in demselben Raume unter der Form von Wärme vergeudete Energie.

Wenn F und $\mathfrak{H}$ die elektrische bezw. die magnetische Kraft in einem Punkte und X, Y, Z bezw. L, M, N ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen sind, so ist der Wert der elektrischen Energie in der Volumeneinheit [45] $\frac{\varepsilon}{8\pi}F^2$, und der Wert der magnetischen Energie [90] $\frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, und mithin ist die gesamte elektromagnetische Energie:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}F^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2$$

oder:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2).$$

Ihre Änderung in der Zeiteinheit ist durch den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right) + \mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]$$

gegeben, welcher den Energiezuwachs in der Zeit- und Volumeneinheit darstellt.

Wenn ϱ den spezifischen Widerstand des Mediums und u_x, u_y und u_z die Komponenten der Stromdichte nach den Koordinatenachsen in dem betrachteten Punkte bedeuten, so ist die in der Volumeneinheit und in einer Sekunde unter der Form von Wärme vergeudete Energiemenge:

$$q = \varrho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2).$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist, wie wir gesehen haben [134]:

$$u_x = cvX = \frac{v}{\varrho} X, \quad \text{und daher:} \quad \varrho u_x^2 = v u_x X;$$

und in analoger Weise findet man:

$$\varrho u_y^2 = v u_y Y, \qquad \varrho u_z^2 = v u_z Z;$$

durch Einsetzung dieser Werte erhält man:

$$q = v(u_x X + u_y Y + u_z Z).$$

Zu demselben Ausdrucke kann man gelangen, wenn man beachtet, dass die in Wärme umgesetzte Energie die Arbeitsmengen darstellt, die von den elektrischen Kräften X, Y, Z, deren Werte in elektromagnetischen Einheiten bezw. vX, vY, vZ sind, auf die Ströme u_x, u_y und u_z geleistet werden.

Die gesamte in der Zeiteinheit in das Volumen *Eins* eintretende Energiemenge ist also:

$$(\alpha) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + q = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + \cdots\right) + \mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + \cdots\right) + 4\pi v\left(u_x X + \cdots\right)\right];$$

die in das Volumen $dxdydz$ eintretende Energiemenge ist:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + q\right) dxdydz,$$

und die in das von der Fläche S begrenzte Volumen eintretende Energiemenge ist:

$$(\beta) \qquad W = \iiint\left(\frac{\partial w}{\partial t} + q\right) dxdydz.$$

Poynting formte unter Zuhilfenahme der Maxwell'schen Gleichungen dieses Volumenintegral in ein Flächenintegral um, welches sich zu einer bemerkenswerten physikalischen Deutung eignet.

Man multipliziere die Maxwell'schen Gleichungen [134]:

$$(1') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi u_x = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi u_y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi u_z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\mu}{v}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\mu}{v}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\mu}{v}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

bezw. mit X, Y, Z und L, M, N, und man summiere dieselben. Die linke Seite der sich ergebenden Gleichung lautet:

$$\frac{\varepsilon}{v}\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+\cdots\right)+\frac{\mu}{v}\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+\cdots\right)+4\pi\left(u_x X+\cdots\right),$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (α):

$$\frac{4\pi}{v}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+q\right).$$

Auf der rechten Seite ergeben die Posten, welche die Differentialquotienten nach x enthalten:

$$Z\frac{\partial M}{\partial x}+M\frac{\partial Z}{\partial x}-\left(Y\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ZM-YN\right).$$

Analog reduzieren sich die die Differentialquotienten nach y und nach z enthaltenden Posten auf:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(XN-ZL\right),\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(YL-XM\right).$$

Man erhält also:

$$\frac{4\pi}{v}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+q\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ZM-YN\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(XN-ZL\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(YL-XM\right).$$

Durch Einführung des aus der obigen Formel ermittelten Wertes von $\frac{\partial w}{\partial t}+q$ in die Formel (β) erhält man:

$$W=\frac{v}{4\pi}\iiint\left[\frac{\partial}{\partial x}(ZM-YN)+\frac{\partial}{\partial y}(XN-ZL)+\frac{\partial}{\partial z}(YL-XM)\right]dxdydz,$$

und nach einer ersten Integration nach x für den ersten Posten, nach y für den zweiten und nach z für den dritten:

$$(\gamma)\qquad W=\frac{v}{4\pi}\left[\iint(ZM-YN)dydz+\iint(XN-ZL)dzdx+\iint(YL-XM)dxdy\right].$$

In dieser Formel sind die Binome innerhalb der Klammern Funktionen von nur zwei Veränderlichen und beziehen sich auf die Punkte der Fläche S; die Integrale sind als auf die ganze Fläche ausgedehnt zu verstehen.

Bezeichnet n die nach aussen gerichtete Normale des Elementes dS der Fläche, ferner (nx), (ny) und (nz) die Winkel, die diese Normale mit den Koordinatenachsen bildet, so ist:

$$dydz = dS\cos(nx),$$
$$dzdx = dS\cos(ny),$$
$$dxdy = dS\cos(nz).$$

Durch Einsetzung in die Formel (γ) und Fortlassung des Faktors v (was so viel heisst, als dass die Komponenten X, Y, Z und folglich F in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt vorauszusetzen sind) ergiebt sich:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int[(ZM - YN)\cos(nx) + (XN - ZL)\cos(ny) + (YL - XM)\cos(nz)]dS.$$

Denken wir uns Strecken, welche die elektrische Kraft F und die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ darstellen, auf die Ebene yz projiziert; die Projektionen seien bezw. mit f und h bezeichnet (Fig. 159), und es seien φ

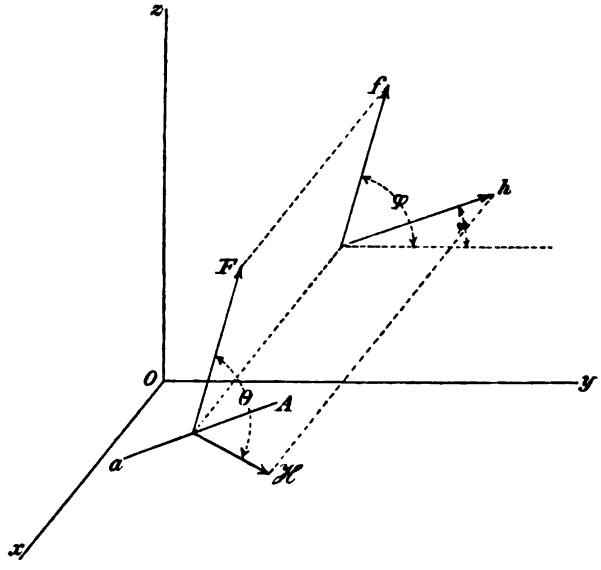

Fig. 159.

und ψ die Winkel, die diese Projektionen mit der Achse Oy bilden. Die Projektionen von f und h auf die Achsen Oy und Oz sind offenbar gleich den Strecken Y, Z, M, N, folglich ist:

$$Y = f \cos \varphi$$
$$Z = f \sin \varphi$$
$$M = h \cos \psi$$
$$N = h \sin \psi,$$

woraus sich ergiebt:

$$ZM - YN = fh (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) = fh \sin (\varphi - \psi).$$

In ganz analoger Weise lassen sich die zwei anderen Binome ausdrücken.

Nun ist $fh \sin (\varphi - \psi)$ der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten f und h, d. h. der Flächeninhalt der Projektion auf die Ebene yz des Parallelogramms, welches als Seiten die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die elektrische Kraft F in dem betrachteten Punkte besitzt. Ebenso ergeben die anderen Binome die Projektionen desselben Parallelogramms auf die anderen Koordinatenebenen. Bezeichnet A einen nach der Normalen der Ebene $F\mathfrak{H}$ gerichteten Vektor mit einem Tensor gleich dem Flächeninhalte $F\mathfrak{H} \sin \theta$ des Parallelogramms mit den Seiten F und $\mathfrak{H}$, wobei θ den von den Kräften F und $\mathfrak{H}$ gebildeten Winkel bedeutet, so stellen die drei Binome die Projektionen A_x, A_y und A_z dieses Vektors auf die Koordinatenachsen dar.

Es ist zu beachten, dass $fh \sin (\varphi - \psi)$ positiv ist, wenn $\varphi > \psi$ ist, d. h. wenn die Drehung, durch welche f auf dem kürzesten Wege mit h zusammenfällt, für einen in die Richtung Ox blickenden Beschauer in einem der Richtung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne stattfindet. Dasselbe gilt für die beiden anderen Projektionen.

Es folgt daraus, dass dieser Vektor, unter Annahme, dass als die positiven Richtungen der Projektionen desselben diejenigen gelten sollen, welche mit den positiven Richtungen der Koordinatenachse zusammenfallen, senkrecht zur Ebene $F\mathfrak{H}$ in der Richtung a anzubringen ist, d. h. in der Richtung, in welche man blicken muss, um die Drehung, durch welche F in $\mathfrak{H}$ übergeführt wird, entgegengesetzt der Richtung des Uhrzeigers stattfinden zu sehen.

Die Projektionen A_x, A_y und A_z werden dagegen die in den Klammern enthaltenen Binome mit entgegengesetztem Vorzeichen darstellen, wenn wir den Vektor A entgegengerichtet annehmen. Wir können die Richtung von A durch eine der folgenden Regeln bestimmen:

Die Richtung des Vektors A ist:

1. diejenige, für welche das System A, F, $\mathfrak{H}$ sich als rechtsgängig ergiebt.

2. diejenige der Vorwärtsbewegung des Maxwell'schen Korkziehers, wenn derselbe in der Richtung von der elektrischen zur magnetischen Kraft herumgedreht wird.

3. diejenige des Mittelfingers der rechten Hand, wenn der Daumen und der Zeigefinger nach F bezw. $\mathfrak{H}$ gerichtet sind und ersterer senkrecht zur Ebene der beiden anderen steht.

4. diejenige, in welche man blicken muss, damit die Drehung, durch welche F auf dem kürzesten Wege in $\mathfrak{H}$ übergeführt werden kann, im Sinne des Uhrzeigers stattfindet.

Nach diesen Vereinbarungen ist:

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int [A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz)]\,dS.$$

Der Posten unter dem Integralzeichen stellt uns die Projektion des Vektors A auf die nach aussen gerichtete Normale der Fläche in dem betrachteten Punkte dar und giebt uns unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens die Projektion auf die nach innen gekehrte Normale.

Bezeichnet man mit A_{ni} diese Projektion, so ist zum Schlusse:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int A_{ni}\,dS. \tag{8}$$

Die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit in den von einer beliebigen geschlossenen Fläche begrenzten Raum eintritt, ist, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{4\pi}$, *durch den in den Raum eintretenden Fluss des Vektors A gegeben, dessen Tensor der Wert* $F\mathfrak{H} \sin\theta$, *d. h. der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten F und* $\mathfrak{H}$ *ist, und dessen Richtung senkrecht zur Ebene* $F\mathfrak{H}$ *ist und mit den Richtungen F und* $\mathfrak{H}$ *ein rechtsgängiges System bildet.*

Dieser Satz ist eine strenge Folgerung der Maxwell'schen Gleichungen; er lässt aber noch nicht vollständig erkennen, wie sich die Energie bewegt, weil er nichts darüber angiebt, welche Energiemenge durch ein Flächenelement oder durch die Flächeneinheit hindurchgeht. Wir bemerken jedoch, dass die einfachste der möglichen Deutungen der Gleichung (8) in der Annahme besteht, dass die das Element dS durchsetzende Energiemenge durch das Differential $A_{ni}dS$ selbst gegeben wird, dessen Integral den Betrag angiebt, um welchen der Energievorrat innerhalb der geschlossenen Fläche S zugenommen hat.

Poynting wurde durch die natürlichste Deutung seiner Formel auf die folgende Hypothese geführt:

Die Energie wandert immer in einer Richtung durch das elektromagnetische Feld, welche sowohl zur Richtung der magnetischen wie der elektrischen Kraft senkrecht steht; durch jede Flächeneinheit einer zur Wanderungsrichtung senkrecht gelegten Ebene geht in einer Sekunde eine Energiemenge hindurch, gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms, welches als Seiten die elektrische und die magnetische Kraft besitzt, dividiert durch 4π.

Der Sinn der Wanderung ist der oben bestimmte Sinn des Vektors A.

Unter der Annahme dieser Poynting'schen Hypothese hängt der Wert der übertragenen Energie bei gegebenen Werten der magnetischen und der elektrischen Kraft von dem Werte des Winkels θ, den die Richtungen beider Kräfte bilden, ab. Es findet keine Übertragung von Energie statt, wenn die Kräfte die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung besitzen, d. h. wenn $\theta = 0^0$ oder $= 180^0$ ist; die Übertragung ist dagegen ein Maximum, wenn die Kräfte senkrecht zu einander stehen, und findet in dem einen oder in dem entgegengesetzten Sinne statt, je nachdem $\theta = 90^0$ oder $= 270^0$ ist.

141. Besonderer Fall eines geradlinigen Stromes. Teilnahme des Dielektrikums und des Leiters an der Übertragung. — Wenden wir diese Hypothese auf einen einfachen Fall an. Ein zylindrischer Leiter (Fig. 160) sei von unten nach oben von einem konstanten Strome durchflossen, dessen Intensität in elektromagnetischen Einheiten den Wert i besitzt. Fassen wir einen Teil des Leiters mit der Länge l und dem Widerstande r, an dessen Enden das Potential die konstanten Werte V_1 und V_2 besitzt, ins Auge, und bezeichnen wir mit $2a$ den Durchmesser des Leiters.

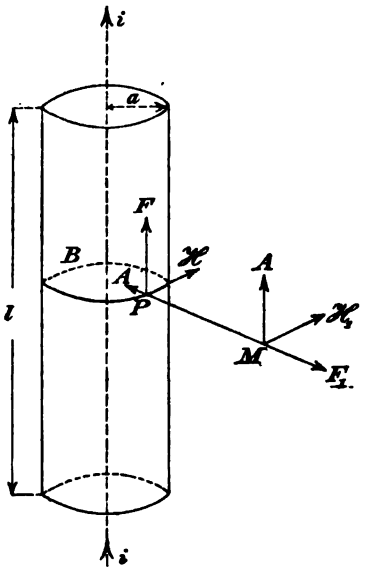

Fig. 160.

Um zu sehen, wie die Energie in diesem Falle wandert, betrachten wir zuerst einen innerhalb des Leiters und unendlich nahe an dessen Oberfläche gelegenen Punkt P; da die Stromstärke konstant und auf den Leiterquerschnitt gleichmässig verteilt ist, so ist die elektrische Kraft F im

Punkte P parallel zur Achse des Zylinders gerichtet, und zwar in dem Sinne, in welchem die Potentiale abnehmen; die magnetische Kraft ist in P wie die an den Schnitt AB gelegte Tangente und, laut der Maxwell'schen Regel, nach $P\mathscr{H}$ gerichtet. Die Wanderung der Energie findet also senkrecht zur Ebene $FP\mathscr{H}$ in der Richtung PA statt, in welcher der Maxwell'sche Korkzieher fortschreitet, wenn er von F nach $\mathscr{H}$ rotiert, nämlich in bezug auf den Zylinder von aussen nach innen. Dasselbe gilt für jeden Punkt des Leiters; es folgt hieraus, dass die Energie sich nicht längs des Leiters bewegt, sondern dass sie von aussen nach dem Inneren desselben fliesst.

Die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Leiters hindurchgeht, ist gleich:

$$\frac{1}{4\pi} F\mathscr{H} \sin\theta,$$

und wird in unserem Falle, da:

$$\theta = 90^0, \qquad \sin\theta = 1$$
$$F = \frac{V_1 - V_2}{l}, \qquad \mathscr{H} = \frac{2i}{a}$$

ist, durch:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{l} \frac{2i}{a}$$

ausgedrückt.

Durch die ganze betrachtete Fläche $2\pi al$ tritt in den Leiter die Energiemenge ein:

$$\frac{2\pi al}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{l} \frac{2i}{a} = (V_1 - V_2)i = ri^2,$$

welche eben der durch den Joule'schen Effekt in Wärme umgesetzten Energie entspricht.

Diese Übereinstimmung musste notwendigerweise eintreten, weil die Poynting'sche Theorie, selbst wenn sie physikalisch nur eine Hypothese ist, mathematisch doch eine berechtigte Folgerung aus den Prinzipien des Elektromagnetismus ist.

In einem ausserhalb des Leiters gelegenen Punkte M ist die magnetische Kraft $\mathscr{H}_1$ ebenfalls senkrecht zu dem Halbmesser gerichtet; die elektrische Kraft F_1, die von dem vom Strome im Dielektrikum erzeugten elektromagnetischen Felde herrührt, kann, mindestens für Punkte, die dem Leiter nahe liegen, wie der Radius gerichtet angenommen werden, da die Leiteroberfläche als äquipotential angesehen werden kann, weil das Potentialgefälle für ein hinreichend kleines Leiterstück vernachlässigt werden darf.

Es folgt daraus, dass der Vektor A, längs dessen die Energie wandert, parallel zu der Achse des Leiters ist und die Richtung von i besitzt.

Thatsächlich ist der Vektor A etwas gegen die Leiteroberfläche geneigt, weil diese keine wirkliche Niveaufläche ist. Die Energie pflanzt sich im Dielektrikum um den Leiter herum fort, hauptsächlich parallel zu demselben, und dringt zu einem geringen Teile in den Leiter ein, in welchem sie unter der Form von Wärme vergeudet wird. Wenn der Leiter keinen Widerstand besässe, so würde der in ihm auftretende Potentialabfall gleich Null sein, d. h. die Leiteroberfläche wäre wirklich eine Niveaufläche, der Vektor A würde keine zur Oberfläche senkrechte Komponente haben, keine Energievergeudung würde durch den Joule'schen Effekt stattfinden, und die Energie würde sich gänzlich parallel zur Leiterachse fortpflanzen. Die Übertragung der Energie findet also im Dielektrikum und nicht im Innern des Leiters statt; letzterer bildet nur sozusagen die Achse der Erscheinung, bestimmt die Fortpflanzungsrichtung und wirkt gewissermassen wie ein Geleise.

In dem praktischen Falle, in welchem der Widerstand des Leiters nicht gleich Null ist, bedingt letzterer die Vergeudung eines Teiles der Energie; der Leiter kann auch in dieser Hinsicht mit einem Geleise verglichen werden, in welchem ein Teil der Energie durch die Reibung in Wärme umgesetzt wird.

Die Poynting'sche Auffassung erklärt noch besser die Anschauung, dass die leitenden Körper bezüglich der elektrischen Kräfte rein negative Eigenschaften besitzen. Wie in den elektrostatischen Feldern die Energie in den dielektrischen und nicht in den leitenden Körpern ihren Sitz hat, so wandert die Energie im Falle des elektrischen Stromes durch das Dielektrikum und nicht durch den Leiter fort. Das Metall, aus welchem der Draht besteht, spielt bei dem Vorgange der Übertragung elektrischer Energie nicht die Rolle eines aktiven Materials; es spielt vielmehr hierbei eine passive Rolle. Mitten in dem umgebenden Medium, wo eigentlich die Kräfte ihren Sitz haben und sich fortpflanzen, hat der Leiterdraht keine andere Funktion, als eine Linie der Schwäche zu bilden, welche bewirkt, dass die Energiewanderung in einer bestimmten Richtung stattfindet; der Draht ist nicht der Sitz der Erscheinung, sondern bestimmt nur für die Erscheinung die Richtung der Fortpflanzung.

Der Leiter stellt nicht einen Kanal, in welchem die Energie fortwandert, sondern einen Raum dar, nach welchem hin ein Teil der Energie konvergiert, und in welchem dieser Teil in Wärme umgesetzt wird.

142. Tragweite der Poynting'schen Theorie. — Wir haben gesehen, dass die Gleichung (8) der Poynting'schen Formeln, welche den Energievorrat angiebt, der in der Zeiteinheit in eine beliebige geschlossene Fläche S eintritt, eine streng folgerichtige Ableitung aus den Maxwell'schen Gleichungen ist; sie muss daher selbst als richtig angenommen werden, und dies um so mehr, nachdem die Hertz'schen Versuche den Maxwell-schen Gleichungen eine experimentelle Grundlage gegeben haben.

Poynting deutet, wie gesagt, diese Gleichung in der natürlichsten Weise, indem er annimmt, dass die Energie in der Richtung des Vektors A derart wandert, dass in der Zeiteinheit durch jede zum Vektor A senkrecht gelegene Fläche eine Energiemenge, deren Wert

$$\frac{1}{4\pi} F \mathfrak{H} \sin\theta$$

beträgt, hindurchgeht.

Man hat jedoch wohl zu beachten, dass dies lediglich eine Hypothese ist; beliebig viele andere Hypothesen über die Fortpflanzungsart der Energie können ebenso gut in Übereinstimmung mit der Gleichung (8) gebracht werden.

In der That, denken wir uns ausser dem schon definierten Vektor A noch einen Vektor A' mit solenoidischer Verteilung, welcher dieselben Dimensionen (MT^{-3}) wie A besitzt, dessen Fluss also eine Energiemenge bezogen auf die Zeiteinheit darstellt, so ist der in die geschlossene Fläche S eintretende Fluss des Vektors A' der Solenoidität wegen gleich Null, und folglich genügt auch der Vektor $A + A'$ der Gleichung von Poynting; man wird sich also auch eine Wanderung der Energie vorstellen können, welche in der Richtung des aus den zwei Vektoren A und A' resultierenden Vektors derart stattfindet, dass in der Zeiteinheit durch die senkrecht zu der Richtung des Vektors gelegene Flächeneinheit eine Energiemenge, dem Werte nach gleich dem Tensor dieses Vektors selbst, hindurchgeht.

Da man sich unendlich viele solche Vektoren wie A' denken kann, so kann sich die Energie auf beliebig viele Weisen, welche sämtlich der Poynting'schen Gleichung Genüge leisten, fortpflanzen.

Es ist also daran festzuhalten, dass die Deutung, die Poynting seiner Gleichung verlieh, obwohl die einfachste und die natürlichste, doch immer noch eine Hypothese ist, und dass beliebig viele andere, ebenso annehmbare Hypothesen aufgestellt werden können.

Diese Betrachtungen waren notwendig, um den Wert der Folgerungen, die aus der Poynting'schen Hypothese abgeleitet werden können, und von denen einige manchmal befremdend und mit den experimentellen Ergebnissen nicht in Übereinstimmung befindlich erscheinen, zu verstehen.

Nach der Poynting'schen Hypothese findet immer eine Energiewanderung statt, wenn der Vektor A nicht gleich Null ist, d. h. wenn die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ von Null verschieden sind, und einen Winkel θ bilden, dessen Wert weder 0^0 noch 180^0 ist. Es ist nun leicht, sich Felder vorzustellen, welche ihre Existenz ruhenden elektrischen und magnetischen Massen verdanken, und in welchen der Vektor A nicht gleich Null ist.

Betrachten wir beispielsweise (Fig. 161) eine in einem Punkte E liegende elektrische und eine in einem Punkte M liegende magnetische Masse.

In allen in endlicher Entfernung befindlichen Punkten P, welche nicht auf der die Punkte E und M verbindenden Geraden liegen, besitzen die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ Werte, die von Null verschieden sind, und ihre Richtungen bilden Winkel, die weder 0^0 noch 180^0 sind; der Vektor A besitzt einen bestimmten Wert und ist senkrecht zur Ebene PEM gerichtet, in bezug auf die Figurebene von hinten nach vorn in den Punkten, welche wie P links von EM liegen, und von vorn nach hinten in den Punkten, die sich wie P' rechts von der Geraden EM befinden. Man würde also in diesem ausschliesslich von statischen Zuständen bedingten Felde eine kontinuierliche Energiewanderung finden, die sich auf der Bahn von Kreisen vollzieht, deren Mittelpunkte auf der Geraden selbst liegen, und deren Ebenen senkrecht zu derselben stehen.

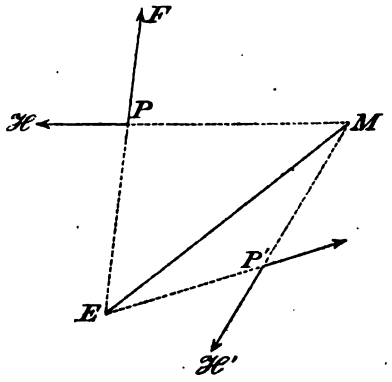

Fig. 161.

Eigentlich wäre eine solche Art von Energieübertragung nicht unmöglich; die Thatsache, dass die Energie sich nicht zeigt, kann durch die solenoidische Eigenschaft der Vektorverteilung, nach welcher keine Anhäufung von Energie an einer Stelle möglich ist, erklärt werden.

Die Annahme, dass thatsächlich diese Übertragung stattfinde, wäre jedoch, zumal sie sich experimentell nicht bestätigt, nicht genügend gerechtfertigt. Das betrachtete Beispiel genügt, um zu zeigen, dass man nicht behaupten kann, die Poynting'sche Hypothese entspreche immer den physikalischen Thatsachen; die von Poynting angedeutete Energiewanderung ist eine der unendlich vielen möglichen Übertragungsarten, es ist aber nicht gesagt, dass sie immer die wirkliche sei.

Aus diesen Gründen konnten sich viele Gelehrte nicht zu der Anerkennung der Poynting'schen Hypothese entschliessen. Wenn man aber

sich einerseits von derselben zu übereilten Folgerungen nicht führen lassen darf, so ist es andererseits übertrieben, mit Hertz zu meinen, dass das Prinzip der Kontinuität der Energie, wie es von Poynting deutlich ausgesprochen, bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft einen genügend vorbereiteten Boden noch nicht finde.

143. Die Energiewanderung findet thatsächlich im Dielektrikum und nicht in dem Leiter statt. — Aus der Poynting'schen Hypothese haben wir abgeleitet, dass die Energie sich im Dielektrikum und nicht im Leiter ausbreitet; aber diese Folgerung kann auch nicht als streng bewiesen angenommen werden, weil wir einen Vektor A' mit solenoidischer Verteilung stets finden können, welcher der Bedingung genügt, dass der aus A und A' resultierende Vektor in einem vollkommen leitenden Medium von Null verschieden sei; in diesem Falle würde sich die Energie auch durch den Leiter hindurch übertragen. Wir können sagen, dass diese Hypothese weniger einfach und weniger wahrscheinlich als diejenige von Poynting ist, aber nichts berechtigt uns zu der Behauptung, dass die eine besser als die andere sei.

Übrigens ergiebt sich, auch ohne auf wissenschaftliche Abstraktionen zurückzugreifen, für denjenigen, welcher die Faraday'sche Auffassung, dass keine in die Ferne wirkenden Kräfte existieren — worauf die Maxwell'sche Theorie aufgebaut ist —, angenommen hat und mit gesundem Menschenverstande eine elektrische Kraftübertragungsanlage betrachtet, ganz natürlich und fast selbstverständlich die Thatsache, dass das Dielektrikum bei der Übertragung der elektromagnetischen Energie die Hauptrolle spielt.

Betrachten wir in der That eine solche Anlage, bestehend aus einem Generator und einem mit diesem durch eine metallische Leitung einen Stromkreis bildenden Motor. Gehen die Leitungen von Bürsten aus, welche auf den rotierenden metallischen Teilen schleifen, so ist zwischen den Ankern beider Maschinen Kontinuität des Metalles, sowie des Dielektrikums vorhanden, und folglich kann man ebenso gut die Hypothese aufstellen, dass die Energie sich im Innern der Leitungsdrähte fortpflanzt, oder dass dieselbe sich ausserhalb derselben durch das Dielektrikum überträgt. Die Schwierigkeit, sich den Vorgang der Übertragung vorzustellen, ist bei den beiden Hypothesen die gleiche, weil innerhalb der Drähte wie ausserhalb derselben keine Bewegung der Massen wahrzunehmen ist. Wir können aber Fälle betrachten, in welchen nur die Kontinuität des Dielektrikums oder die des Metalles vorhanden ist, und aus welchen wir sichere Kennzeichen für eine Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen gewinnen können.

Bei einer Übertragung zwischen einem Wechselstromgenerator mit

stehendem Anker und einem Wechselstrommotor derselben Type ist nur Kontinuität des Dielektrikums und nicht des Metalles vorhanden, da in diesem Falle die metallische Kontinuität nur zwischen den festen Teilen beider Maschinen bestehen kann, aber nicht zwischen diesen Teilen und den beweglichen, welche gewöhnlich aus den sternförmig angeordneten Feldmagneten bestehen und in dem Gehäuse, ohne dasselbe zu berühren, rotieren. Nun übertragen, obwohl die metallische Kontinuität fehlt, diese rotierenden Magnetkränze die Bewegung ebenso, wie es etwa zwei ineinander greifende Zahnräder thun würden. Zu der Übertragung ist also die Kontinuität des Metalles nicht nötig; die isolierenden Schichten, welche die beweglichen Teile der beiden Maschinen umgeben, verhindern die Übertragung nicht, das Dielektrikum lässt sich von der elektromagnetischen Energie durchsetzen. Dies wird noch verständlicher, wenn man anstatt einer direkten Übertragung, eine indirekte Übertragung mittels Transformatoren ins Auge fasst. Und in der That ist in diesem Falle keine metallische Kontinuität vorhanden, auch nicht zwischen den festen Teilen beider Maschinen.

Betrachten wir nun dagegen den Fall, in welchem die Kontinuität des isolierenden Mediums unterbrochen ist; denken wir uns z. B., dass das Zimmer, in welchem sich der Generator, oder dasjenige, in welchem sich der Motor befindet, oder beide mit einer dicken Metallschicht bekleidet seien, welche weder an den Wänden, noch an dem Boden und an der Decke einen isolierenden Teil unbedeckt lasse. In diesem Falle ist keine Übertragung mehr möglich; wir können jetzt absolut keine Menge von elektromagnetischer Energie von dem Zimmer, wo der Generator ist, austreten, und in das Zimmer, wo der Motor ist, eintreten lassen. Die metallische Wand lässt sich von der elektromagnetischen Energie nicht durchsetzen; diese tritt aus dem Zimmer aus oder in das Zimmer ein nur unter der Bedingung, dass sie durch eine Öffnung durchgehen kann; und diese Öffnung bleibt dem Durchgange der Energie auch dann noch offen, wenn sie nur durch eine isolierende Substanz geschlossen ist, ebenso wie die Fenster unserer Häuser dem Lichte offen sind, wenn sie nur durch Glasscheiben geschlossen sind. Die Energie kann teilweise in das Metall der Wand eintreten, wird aber daselbst in Wärme umgewandelt und kann nur als solche sich weiter übertragen und auf die andere Seite übergehen. Wenn das die Wandung bildende Metall ein vollkommen leitender, mit Widerstand nicht behafteter Körper wäre, so würde auch dies nicht stattfinden; die elektromagnetische Energie würde in das Innere des Leiters überhaupt nicht eindringen können. Wenn die Thatsache, welche die bemerkenswerten Forschungen von Dewar und Fleming voraussetzen lassen, und zwar, dass der spezifische Widerstand der Metalle bei der Temperatur

des absoluten Nullpunktes, gleich Null wird, wahr wäre, so würde man sagen können, dass eine metallische Umkleidung bei dem absoluten Nullpunkte der Temperatur einen vollkommenen Schirm für die elektromagnetische Energie bildet, durch Wirkung derselben nicht erwärmt werden kann und ständig auf der Temperatur Null bleibt.

Man muss also den Schluss ziehen, dass von den beiden Hypothesen, dass die elektromagnetische Energie durch das Metall, oder ausserhalb des Metalles durch das Dielektrikum wandert, nur die zweite annehmbar ist. Die Erwärmung der Drähte, die die Erzeuger- mit der Empfänger-Station verbinden, schwächt die Annehmbarkeit dieser Hypothesen nicht; auch bei den Triebwerken der Mechanik erwärmen sich nicht die übertragenden Glieder, sondern die Lager, die Führungen etc.

Wir haben uns hauptsächlich auf Wechselströme bezogen, welche sich für die Betrachtungen über die Energieübertragung besser eignen, weil bei den Wechselströmen die Änderungen der Zustände des elektrischen Mediums beobachtet werden können, während diese Zustände bei den Gleichströmen unverändert erhalten bleiben.

Bei den Wechselströmen bestätigt uns eine lange Reihe von Beobachtungen und Erscheinungen immer deutlicher die Annahme, dass das Dielektrikum der Sitz und das Übertragungsmedium der Energie ist.

So stellt sich uns die Erscheinung des Skin-Effektes, durch welche ein Strom mit grosser Frequenz sich an der Leiteroberfläche lokalisiert und auf den ganzen Querschnitt nicht gleichförmig verteilt, nach den angestellten Betrachtungen als eine sehr plausible Folgerung unserer Anschauung dar. Wir haben gesehen, dass die Energie grösstenteils parallel zu dem Leiter wandert, und nur ein wenig derselben von aussen nach dem Innern des Leiters konvergiert und sich in Wärme umwandelt. Wenn nun der Strom rasch veränderlich ist, so hat die Energie gewissermassen nicht die Zeit, sehr tief in den Leiter hinein einzudringen, und es ist natürlich, dass ihre Wirkungen sich auf die Leiteroberfläche beschränken.

Die Erscheinung kann übrigens mit derjenigen der Wärmeübertragung verglichen werden. Die Temperaturveränderungen z. B., die auf der Erdoberfläche stattfinden, pflanzen sich nur bis zu einer geringen Tiefe fort.

Der Vergleich, den man früher gewöhnlich zwischen einem elektrischen Strome und einer Flüssigkeitsströmung in einem Rohre anstellte, passt nur insofern, als man es in beiden Fällen mit einer Energieübertragung zu thun hat, welche durch eine Verschiebung, im ersten Falle elektrischer, im zweiten Falle materieller Massen stattfindet. Ganz anders ist aber der eigentliche Vorgang der Übertragung der Energie in beiden Fällen.

In der That wandert die Energie bei der Strömung einer Flüssigkeit im Innern des Rohres als lebendige Kraft, von den materiellen Massen

mitgenommen, und wird nur teilweise auf die Rohrwände übertragen und durch die daselbst stattfindende Reibung vergeudet, indem sie sich in Wärme umsetzt; bei einem elektrischen Strome wandert dagegen die Energie ausserhalb des Leiters und wird nur teilweise auf denselben übertragen und in Wärme durch den Joule'schen Effekt umgesetzt. Während die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am grössten in der Rohrachse ist, ist dagegen die Stromdichte am grössten an der Leiteroberfläche.

144. Allgemeine Betrachtungen über die obigen Theorien. — Alle die oben besprochenen Theorien und Betrachtungen führen uns zu der Annahme, dass die Schwingungen sowohl die des Lichtes wie die thermischen und die elektromagnetischen sich im Äther fortpflanzen; und wenn einst, wie schon Lamé vorhersagte, auch die Kräfte in den elastischen Körpern mittels des Äthers erklärt werden, so wird man dann allgemein sagen müssen, dass das Medium, durch welches sich die Energie in einer beliebigen Form fortpflanzt, immer ein und dasselbe ist, nämlich der den ganzen Raum erfüllende Äther. Es giebt nur einen Träger der Energie, obwohl ein Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die Fortpflanzung stattfindet, je nach den verschiedenen Erzeugungsarten der Energie. Die Maxwell'sche Theorie und die Hertz'schen Versuche haben es beispielsweise unzweifelhaft erscheinen lassen, dass das Medium, welches die Energie von der Welle einer Turbine zu derjenigen eines entfernten Motors oder von dem Kessel einer Dampfmaschine zu den Kohlenspitzen, zwischen welchen sich der Volta'sche Lichtbogen bildet, oder zu den leuchtenden Kohlenfäden der Glühlampen überträgt, dasselbe ist, durch welches und mittels dessen die gesamte Energie, über die wir auf der Erde verfügen, von der Sonne zu uns kommt oder gekommen ist.

Wechselströme, Hertz'sche Schwingungen, thermische und Licht-Schwingungen sind im wesentlichen nur verschiedene Formen einer und derselben Erscheinung: die Verschiedenheiten liegen nur in den Parametern, d. h. in den numerischen Grössen und zwar hauptsächlich in der Grösse der Frequenz.

Dass die Kenntnis des Wertes der Frequenz allein schon genügt, die grossen Verschiedenheiten bei den erwähnten Erscheinungen zu erklären, versteht man leicht, wenn man bedenkt, welchen grossen Einfluss dieser Wert auf die durch elektrische Mittel direkt erzeugten Schwingungen hat. In der That werden die industriellen Wechselströme, deren Frequenz zwischen 20 und 100 Perioden in der Sekunde variiert, wie die Gleichströme übertragen; der ganze Querschnitt des Leiters wird ausgenutzt, aber dem Ohm'schen Widerstand fügt sich der induktive Widerstand hinzu, dessen Wert mit der Frequenz zunimmt. Bei höheren Frequenzen

jedoch, wie z. B. bei jenen der Entladungsströme der Kondensatoren, wird der ganze Querschnitt der Leiter nicht mehr ausgenutzt, der induktive Widerstand wird sehr gross, sodass die Impedanz erhebliche Werte erreicht und der Strom sich leichter im Dielektrikum als im Leiter übertragen kann. Wenn man noch grössere Frequenzen erreichen könnte, bis zu den der strahlenden Wärme und dem Lichte entsprechenden, so würden diese Ströme nicht mehr im Leiter, sondern nur im Dielektrikum fliessen können. Während man bei den Strömen von niedriger Frequenz in den Leitern ein einfaches Mittel besitzt, die Fortpflanzung der Energie in bestimmten Bahnen zu leiten, so können die Schwingungen von höherer Frequenz nur durch optische Mittel wie Spiegel, Linsen, Prismen etc. in bestimmten Richtungen geleitet werden.

Wir wollen kurz auf die Bedeutung dieser Wahrnehmung hinweisen. Wenn das Licht nichts anderes als eine elektromagnetische Schwingung ist, so liegt der Gedanke nahe, dass man durch einen elektrischen Strom von hoher Frequenz das Licht direkt erzeugen kann, ohne durch das Übergangsstadium der Wärme hindurchzugehen, welche zur Zeit den grössten Teil der Energie verzehrt. Ohne auf die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ergebnisses einzugehen, können wir jedoch sagen, dass ein solcher Strom sich durch Leiter nicht übertragen könnte, und folglich würde die Aufgabe so auszudrücken sein: Einen Apparat zu finden zur Umwandlung eines Stromes von kleiner Frequenz, welcher durch die gewöhnlichen Leitungen übertragen werden kann, in einen Strom von hoher Frequenz, welcher fähig ist, direkt das Licht zu geben.

Die Grundgedanken über das Wesen der Energiewanderung durch den Äther hat man durch Darstellungen und mechanische Modelle zu veranschaulichen gesucht, welche zum Teil, wie vornehmlich die von Fitzgerald und von Lodge angegebenen, gewiss erheblich dazu beigetragen haben, die neuen Theorien gemeinverständlich zu machen. Dies sind aber nur Kunstgriffe, die den mit den mathematischen Ableitungen wenig vertrauten Anfängern das Verständnis erleichtern. In vollkommenerer Weise dienen zur Schilderung der Ideen über die Eigentümlichkeiten des Äthers und über den Vorgang der Energiewanderung die theoretischen Untersuchungen, bei welchen in mathematischer Form die Eigenschaften des elektromagnetischen Mediums mit denjenigen der elastischen Körper verglichen und die mechanischen Eigenschaften gesucht werden, mit welchen ein Körper versehen sein müsste, damit seine Bewegungen den Gleichungen von Maxwell und Hertz genügen. Diese Untersuchungen können auch an und für sich von grossem Belang sein, weil der Beweis einer Analogie oder einer prinzipiellen Verschiedenheit an sich schon eine wissenschaftliche Erfindung bildet. Wenn man aber dieselben als elektromagnetische

Theorien ansieht, so besitzen sie ebenfalls den Charakter provisorischer Modelle, deren Aufgabe ähnlich derjenigen der Gerüste ist, die bei den Hochbauten verwendet werden, und zwar während des Baues notwendig sind, aber nach dessen Fertigstellung niedergerissen werden müssen, um die Ansicht des Baues nicht zu beeinträchtigen. Die Gleichungen von Maxwell und Hertz fassen jenen Teil unserer Kenntnisse über das elektromagnetische Medium zusammen, welcher bei dem heutigen Stande der Wissenschaft sich in bestimmte Form bringen lässt; sie fassen zusammen, was man thatsächlich durch die Erfahrung über die mechanischen Eigenschaften des Mediums kennt. Die Kenntnis jener Gleichungen berechtigt uns zu der Behauptung, dass wir den Äther kennen, ebenso gut, wie wir behaupten können, die Eigenschaften der elastischen Körper zu kennen, weil wir die Gleichungen besitzen, welche die Gleichgewichts- und die Bewegungsgesetze derartiger Körper ausdrücken. Eine mechanische Theorie des Äthers kann berechtigt sein, wenn sie mit jenen Gleichungen übereinstimmt, sie kann aber denselben nichts hinzufügen, oder wenn sie es thut, so fügt sie zu viel hinzu. Die Gleichungen von Maxwell und Hertz bilden für sich eine mechanische Theorie, eine umfassende Theorie ohne nähere Bezeichnung des Mechanismus; eine sogenannte mechanische Deutung dieser Theorie thut nichts anderes, als den Mechanismus zu spezifizieren, und es besteht mehr Wahrscheinlichkeit, sich dadurch von der Wirklichkeit zu entfernen, als sich derselben zu nähern. Eine Theorie ist um so wahrscheinlicher, je abstrakter sie ist. Wenn dieselbe ihren Ausdruck in Gleichungen finden kann, welche den durch die Erfahrung direkt angegebenen Thatsachen entsprechen, so besitzt sie alles, was man heute wünschen kann. Der Fortschritt besteht darin, dass die Gleichungen später eine grössere Zahl von experimentellen Thatsachen umfassen.

Anhang.

Allgemeine Bemerkungen über die elektrischen und magnetischen Masseinheiten.

1. Grund- und abgeleitete Einheiten. Absolutes C.-G.-S.-Masssystem. — Die Zahl, welche das *Mass* einer Grösse angiebt, drückt das Verhältnis zwischen dieser und einer anderen zur Vergleichung gewählten und *Masseinheit* genannten Grösse derselben Art aus. Um die Messung einer Grösse auszuführen, muss man zuerst die Masseinheit für die Grössen jener bestimmten Art gewählt haben.

Man kann als Einheit ganz willkürlich eine beliebige unter den Grössen jener Gattung annehmen; die so gewählten Einheiten nennt man *empirische Einheiten.*

Ein empirisches Normalmass soll dauerhaft sein, d. h. es soll sich weder mit der Zeit, noch durch Übertragung von einem nach einem anderen Orte verändern, derart, dass alle mit dieser Einheit an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten vorgenommenen Messungen unter einander vergleichbar sind; es soll ferner leicht von neuem hergestellt werden können.

Man kann auch eine Masseinheit durch die mathematischen Beziehungen definieren, die zwischen jener und anderen schon voraus bestimmten Einheiten von verschiedener Natur bestehen. Die so definierte Masseinheit heisst *abgeleitet,* und in bezug auf diese werden die anderen *Grundeinheiten* genannt.

Bei der Festsetzung der Masseinheiten für ein gegebenes Grössensystem wird man eine gewisse Zahl von empirischen Grundeinheiten frei wählen können und daraus alle anderen herleiten. Wegen der Schwierigkeit, die empirischen Normalmasse derart zu bestimmen, dass sie die erforderten Bedingungen in bezug auf Dauerhaftigkeit erfüllen, ist ein Masssystem um so besser, je kleiner die Zahl der empirischen Einheiten ist; die kleinste Zahl letzterer hängt von der Natur der zu messenden Grössen ab. In den Aufgaben der Geometrie beispielsweise betrachtet man nur den Begriff *Raum*, und es genügt hierbei als empirische Einheit die

Längeneinheit; in der Kinematik führt man einen neuen Grundbegriff, den Begriff *Zeit*, ein, und es wird eine willkürlich gewählte Zeiteinheit nötig; in der Mechanik, bei deren Studium man auf den neuen Begriff der Masse kommt, muss eine dritte willkürliche Einheit, die *Masseneinheit* definiert werden.

Ein lediglich auf den drei empirischen Einheiten der Länge, Zeit und Masse beruhendes Masssystem heisst *absolutes Masssystem.* Gauss führte als Erster den Begriff von absoluten Messungen in die Wissenschaft ein und wandte dieselben in dem Gebiete des Magnetismus an, und Kirchhoff zeigte die Möglichkeit, die elektrischen Messungen auf absolute Systeme zu reduzieren; Wilhelm Weber aber gebührt das Verdienst, diese Masssysteme in einen geordneten Zusammenhang gebracht zu haben.

Bezeichnen wir allgemein mit L, M und T die empirischen Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit, so können wir immer eine abgeleitete Einheit, abgesehen von konstanten Faktoren, in die Form:

$$L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

bringen, wobei die Exponenten α, β und γ beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Werte besitzen und auch teilweise gleich Null sein können. Durch einen solchen symbolischen Ausdruck lässt sich das Gesetz darstellen, nach welchem die abgeleitete Einheit mit dem Variieren der Grundeinheiten variiert; es werden dadurch, wie man sagt, die physikalischen Dimensionen oder kurzweg die *Dimensionen* der abgeleiteten Einheit angegeben.

Ist A der Wert der abgeleiteten Einheit in dem auf den empirischen Einheiten L, M und T beruhenden Systeme, und wählt man als neue empirische Einheiten L', M' und T', so nimmt die abgeleitete Einheit einen neuen Wert:

$$A' = A\left(\frac{L'}{L}\right)^\alpha \left(\frac{M'}{M}\right)^\beta \left(\frac{T'}{T}\right)^\gamma$$

an.

Wenn n die Zahl bedeutet, welche das Mass einer Grösse in der Einheit A ausdrückt, so wird dieselbe Grösse in der Einheit A' von der Zahl n' angegeben, die der Beziehung:

$$nA = n'A', \text{ d. h. } \frac{n'}{n} = \frac{A}{A'}$$

genügt.

Das Verhältnis der numerischen Werte einer und derselben, aber in zwei verschiedenen Einheiten ausgedrückten Grösse ist gleich dem reziproken Werte des Quotienten der betreffenden Einheiten.

Die „British Association for Advancement of Sciences" wählte als

Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit, bezw. das *Centimeter*, das *Gramm* und die *Sekunde;* diese Einheiten wurden definitiv und offiziell von dem internationalen, in Paris im Jahre 1881 abgehaltenen Kongresse der Elektrotechniker adoptiert, wobei auch das Übereinkommen getroffen wurde, die abgeleiteten Einheiten dieses Systemes einfach mit dem Symbol C. G. S. zu bezeichnen, ohne denselben besondere Benennungen zu erteilen; man machte nur eine Ausnahme für die Einheiten der Kraft und der Arbeit, welche bezw. *Dyn* und *Erg* genannt wurden.

Ein Masssystem, welches auf den Grundeinheiten Centimeter, Gramm und Sekunde beruht, heisst *absolutes C. G. S.-System.*

2. Geometrische, kinematische und mechanische Grössen. — Es ist zweckmässig, hier die Dimensionen und die C. G. S.-Einheiten der wichtigsten in der Geometrie, in der Kinematik und in der Mechanik vorkommenden Grössen vorauszuschicken.

Grössen	Dimensionen	C. G. S.-Einheiten
Geometrie:		
Winkel	abs. Zahl $= L^0$	—
Länge	L^1	cm.
Fläche	L^2	cm.^2
Volumen	L^3	cm.^3
Kinematik:		
Zeit	T	sek.
Geschwindigkeit	LT^{-1}	$\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$
Beschleunigung	LT^{-2}	$\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$
Mechanik:		
Masse	M	gr.
Kraft	LMT^{-2}	$\frac{\text{cm. gr.}}{\text{sek.}^2}$
Arbeit, Energie, Lebendige Kraft	L^2MT^{-2}	$\frac{\text{cm.}^2\text{ gr.}}{\text{sek.}^2}$
Effekt, Leistung	L^2MT^{-3}	$\frac{\text{cm.}^2\text{ gr.}}{\text{sek.}^3}$

Für den praktischen Gebrauch ergeben sich die C. G. S.-Einheiten von Leistung und Arbeit zu klein; deshalb wurde bestimmt, das C. G. S.-System als Grundlage beizubehalten, aber die Einheiten der beiden ge-

nannten Grössen mit einer passenden Potenz von 10 zu multiplizieren, und man adoptierte:

$$\text{als Arbeitseinheit das } \textit{Joule} = 10^7 \text{ erg},$$

$$\text{als Leistungseinheit das } \textit{Watt} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}.$$

Dies sind die hauptsächlich von den Elektrotechnikern gebrauchten Einheiten: die Maschineningenieure dagegen verwenden zumeist noch als Einheit für die Kraft, die Arbeit und die Leistung bezw. das Kilogramm, das Kilogrammmeter und die Pferdekraft oder horse-power.*)

Bedeutet g die Beschleunigung der Schwerkraft, so sind die Verhältnisse zwischen diesen verschiedenen Einheiten:

kg.	$= 10^5\ g$ dyn	
kgm.	$= 10^7\ g$ erg	$= g$ Joule
P S.	$= 10^7.75\ g \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}$	$= 736$ Watt
HP	$= 550$ foot-pound	$= 746$ Watt
Joule	$= 10^7$ erg	$= \frac{1}{g}$ kgm.
Watt	$= 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}$	$= \frac{1}{736}$ P. S.
Kilowatt	$= 10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}$	$= 1{,}36$ P. S.

3. Magnetische Grössen. — Wir wissen nicht, welches eigentlich die physikalischen Dimensionen der magnetischen Grössen sind, und wir können es auch nicht wissen, weil es dafür zuerst notwendig wäre, das Wesen und die physikalische Natur des Magnetismus selbst zu kennen. Wählt man aber die Dimensionen einer dieser Grössen ganz willkürlich, dann sind die Dimensionen aller anderen vollständig bestimmt, und man kann auf diese Basis das Masssystem gründen. Die magnetischen Grössen können also auf unendlich viele Weisen auf ein absolutes Mass reduziert werden, und es ist selbstverständlich, dass man unter allen jenes System gewählt hat, welches die grösste Vereinfachung in den Formeln und Rechnungen mit sich bringt. Bei der Behandlung der magnetischen Felder ist die Coulomb'sche Formel für das Gesetz der zwischen zwei gleichen *magnetischen* Massen bei verschiedenen Abständen vorhandenen Abstossungskraft grundlegend, da deren Konstante k in fast allen zwischen magnetischen Grössen bestehenden Beziehungen erscheint. Man ist daher

*) Der Pariser Kongress der Maschineningenieure nahm als Leistungseinheit das *Poncelet* an, welches gleich 100 kgm. pro Sekunde ist.

übereinkommen, diese Grösse als einfache, dimensionslose Zahl zu betrachten.

Wir haben gesehen [62], wie man, von dieser Grundannahme ausgehend, durch das Gauss'sche Verfahren aus der Coulomb'schen Formel die Einheit für die magnetische Masse und mithin ihre Dimensionen ableiten kann. Die Dimensionen aller anderen magnetischen Grössen gehen alsdann aus den zwischen denselben bestehenden Beziehungen direkt hervor.

Dimensionen der magnetischen Grössen.

Faktor k der Coulomb'schen Formel (für magnetische Massen)	Zahl
Magnetische Masse	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Feldstärke	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetischer Kraftfluss	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetisches Potential	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Dichte des Magnetismus	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetisches Moment	$L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Intensität der Magnetisierung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Kraft	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Induktion	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Suszeptibilität	Zahl
Magnetische Permeabilität	Zahl
Magnetische Verschiebung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Spezifischer magnetischer Widerstand	Zahl
Magnetischer Widerstand	L^{-1}
Potenz eines magnetischen Blattes	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$

4. Elektrische Grössen. — Die physikalischen Dimensionen der elektrischen Grössen sind, wie diejenigen der magnetischen Grössen, von vornherein nicht bekannt, man kann aber durch die willkürliche Wahl irgend einer derselben beliebig viele absolute Masssysteme aufstellen. Die Wahl

wird natürlich auch hier auf dasjenige System fallen, welches die grösste Vereinfachung in den Formeln und Berechnungen mit sich bringt.

In einem sich im Gleichgewichte befindenden elektrischen Felde ist, ebenso wie in einem magnetischen Felde, die Coulomb'sche Formel von grossem Belang, und es ist daher vorteilhaft, die Konstante k als eine einfache absolute Zahl zu betrachten. Es handelt sich hierbei natürlich um die Coulomb'sche Formel für das Gesetz der zwischen zwei gleichen *Elektrizitäts*mengen bei verschiedenen Abständen vorhandenen Abstossungskraft [30]. Bei der Behandlung der dynamisch-elektrischen Erscheinungen, die ihre Entstehung den in elektrischen oder magnetischen Feldern auftretenden Veränderungen verdanken, ist dagegen die Vereinfachung, die man dadurch erlangt, dass man k als eine absolute Zahl annimmt, eine sehr kleine, und es ist vorzuziehen, als dimensionslos den Faktor h der Formel $\mathfrak{F} = hi$ (2) [94], welcher fast bei allen elektromagnetischen Erscheinungen eine Rolle spielt, anzunehmen.

Es ist daher zweckmässig, zwei Masssysteme für die elektrischen Grössen aufzustellen: das *elektrostatische System*, welches von der Hypothese ausgeht, dass der Faktor k der Coulomb'schen Formel für Elektrizitätsmengen eine einfache Zahl sei, und das *elektromagnetische System*, welches als einfache Zahl den Faktor h der Formel $\mathfrak{F} = hi$ annimmt.

In dem ersten System wird die Grösse einer Elektrizitätsmenge am einfachsten durch die Kräfte definiert, welche zwischen Elektrizitätsmengen wirken, die sich im Gleichgewichte befinden; in dem zweiten definiert man auf die einfachste Weise die Grösse der Stärke eines elektrischen Stromes durch seine elektromagnetischen Wirkungen. Die Wahl zweier Masssysteme entspricht der Thatsache, dass die Grössenordnung der verschiedenen Grössen eine andere ist, je nachdem man die Elektrizität im Gleichgewichtszustande oder im Bewegungszustande betrachtet.

Dimensionen der elektrischen Grössen.

Grössen	Elektrostatisches Masssystem	Elektromagnetisches Masssystem
Faktor k der Coulomb'schen Formel (für Elektrizitätsmengen)	Zahl	$L^2 T^{-2}$
Elektrizitätsmenge	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrische Flächendichte	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrische Feldstärke	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$

Grössen	Elektrostatisches Masssystem	Elektromagnetisches Masssystem
Elektrischer Kraftfluss	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Elektrisches Potential	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Elektrische Verschiebung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrostatische Kapazität	L	$L^{-1} T^{2}$
Dielektrizitätskonstante	Zahl	$L^{-2} T^{-1}$
Elektromotorische Kraft	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Stromstärke	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Widerstand	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$
Spezifischer elektrischer Widerstand	T	$L^{2} T^{-1}$
Elektrische Leitfähigkeit	$L T^{-1}$	$L^{-1} T$
Spezifische Elektrische Leitfähigkeit	T^{-1}	$L^{-2} T$
Faktor h der Formel $\mathfrak{P} = hi$	$L^{-1} T$	Zahl
Koeffizient der gegenseitigen Induktion Koeffizient der Selbstinduktion	$L^{-1} T^{2}$	L
Impedanz Reaktanz	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$

5. Beziehung zwischen den Einheiten der beiden Systeme. — Das gleichzeitige Vorhandensein zweier Masssysteme bringt praktisch keine Schwierigkeit mit sich, weil man stets, wenn die Beziehungen zwischen den Dimensionen der Einheiten einer gewissen Grösse in den beiden Systemen bekannt sind, von dem einen zu dem anderen übergehen kann.

Bezeichnet v das Verhältnis zwischen der elektromagnetischen und der elektrostatischen C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge, so kann man die Dimension einer jeden beliebigen dem einen System angehörigen Einheit aus der entsprechenden Einheit des anderen Systems ohne weiteres durch einfache Multiplikation mit einer Potenz von v ableiten.

Verhältnisgrössen zwischen den elektromagnetischen und elektrostatischen C. G. S.-Einheiten der wichtigsten elektrischen Grössen.

Elektrizitätsmenge	v
Stromstärke	
Elektrischer Kraftfluss	$\frac{1}{v} = v^{-1}$
Potential	
Elektromotorische Kraft	
Kapazität	v^2
Widerstand	$\frac{1}{v^2} = v^{-2}$
Koeffizient der gegenseitigen Induktion	
Koeffizient der Selbstinduktion	

Zwischen den in den verschiedenen Systemen ausgedrückten Werten einer und derselben Grösse bestehen wechselseitige Beziehungen. Durch Vergleichung der Dimensionen einer und derselben Grösse in beiden Systemen ermittelt man die Dimension von v, welche sich als diejenige einer Geschwindigkeit darstellt.

Das Mittel aus den experimentell gefundenen Werten von v stimmt mit dem Mittel der von den verschiedenen Forschern berechneten Werte der Lichtgeschwindigkeit überein:

$$v = 3 . 10^{10} \text{ cm. in der Sek.}$$

Maxwell gab eine bemerkenswerte physikalische Deutung dieses Verhältnisses v als einer Geschwindigkeitsgrösse, indem er die Wirkungen betrachtete, die zwischen gleichnamigen elektrischen Massen ausgeübt werden, wenn sich die Körper, in welchen die elektrischen Massen vorhanden sind, auf parallelen Bahnen bewegen, unter der Voraussetzung, dass zu der elektrostatischen Wirkung sich eine elektrodynamische addiert, welche der zwischen zwei Strombahnen bestehenden Wirkung analog ist.*) Wenn die gleichnamigen elektrischen Massen gleichförmig auf zwei parallele Ebenen verteilt sind, welche sich mit der Geschwindigkeit v bewegen, so sind die beiden entgegengesetzten Wirkungen, die elektrostatische und die elektrodynamische, einander gleich und heben sich gegenseitig auf.

Die elektromagnetische Lichttheorie und die Hertz'schen Versuche haben nachher in glänzender Weise bewiesen, dass v die Fortpflanzungs-

*) Diese sinnreiche Ableitung wurde durch die Versuche von Rowland bestätigt, welcher mit Hilfe einer in sehr schnelle Rotation versetzten dielektrischen Scheibe die Wirkung eines Konvektionsstromes auf die Magnetnadel nachwies.

geschwindigkeit der elektromagnetischen, der Wärme- und der Licht-Strahlen in einem Medium ist, in welchem die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität gleich *Eins* sind.

6. **Praktisches Masssystem.** — Für die industrielle Praxis sind die Einheiten des elektromagnetischen C. G. S.-Systemes entweder zu gross oder zu klein, sodass die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Grössen durch sehr grosse oder durch sehr kleine Zahlen ausgedrückt werden müssten. Das praktische System beruht daher zwar auf dem absoluten elektromagnetischen C. G. S.-System, aber die verschiedenen Einheiten des ersteren Systems sind aus den entsprechenden Einheiten des letzteren durch eine Multiplikation mit einer passenden Potenz von 10 hergeleitet und dadurch auf eine den hauptsächlich vorkommenden Werten nahe liegende Grössenordnung gebracht. Sind diese Koeffizienten für zwei Einheiten bestimmt, so ergeben sich unmittelbar die Koeffizienten für alle anderen. Als Benennungen dieser praktischen Einheiten wurden die Namen von hervorragenden Elektrikern gewählt, zum Teil in abgekürzter Form.

Die praktischen Einheiten der wichtigsten elektrischen Grössen sind:

für die Widerstände	das	*Ohm*	$= 10^9 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$
„ elektromotorischen Kräfte und Potentialdifferenzen . .	„	*Volt*	$= 10^8 \frac{\text{cm.}^{\frac{3}{2}}\,\text{gr.}^{\frac{1}{2}}}{\text{sek.}^2}$
„ Stromstärken	„	*Ampère*	$= \frac{Volt}{Ohm} = \cdots = 10^{-1} \frac{\text{cm.}^{\frac{1}{2}}\,\text{gr.}^{\frac{1}{2}}}{\text{sek.}}$
„ Elektrizitätsmengen	„	*Coulomb*	$= Ampère.\,\text{sek.} = 10^{-1}\,\text{cm.}^{\frac{1}{2}}\,\text{gr.}^{\frac{1}{2}}$
„ elektrostatischen Kapazitäten .	„	*Farad*	$= \frac{Coulomb}{Volt} = 10^{-9} \frac{\text{sek.}^2}{\text{cm.}}$
„ Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion	„	*Henry*	$= \frac{Volt.\,\text{sek.}}{Ampère} = \text{sek.}\,Ohm = Sekohm = 10^9\,\text{cm.} =$ Erdquadrant.

Diese aus Potenzen von 10 gebildeten Koeffizienten für die praktischen Einheiten, sowie die Benennungen *Ohm*, *Volt* und *Farad* wurden von der „British Association" vorgeschlagen und von dem Pariser Kongress im Jahre 1881 offiziell angenommen, welch letzterer auch die Benennungen *Ampère* und *Coulomb* festsetzte. Die Benennung *Henry* wurde von dem Kongress in Chicago im Jahre 1893 angenommen; vorher war die Ein-

heit der Induktanz *Quadrant* oder *Sekohm* genannt worden. Der Pariser Kongress 1881 adoptierte ferner offiziell für die Vielfachen der praktischen Einheiten dieselben Bezeichnungen, wie sie in dem Metersystem gebräuchlich sind, und fügte die Vorsilben *Mega* und *Mikro* hinzu, durch welche das 10^6-fache bezw. das 10^{-6}-fache der betreffenden Grösse bezeichnet werden soll.

Das praktische System, welches aus dem elektromagnetischen C. G. S.-System abgeleitet worden ist, kann seinerseits als ein absolutes elektromagnetisches System angesehen werden, welches als Grundeinheiten:

$$L = 10^9 \text{ cm.} = \text{Quadrant}$$
$$M = 10^{-11} \text{ gr.}$$
$$T = \text{sek.}$$

hat.

Das *Joule* und das *Watt* sind die Einheiten der Arbeit bezw. der Leistung in diesem System, sie können aber, wie wir gesehen haben, unabhängig von jeder Betrachtung elektrischer Vorgänge durch die C. G. S.-Einheiten und passende Koeffizienten definiert werden.

7. Absolute und relative Messungen. Normalien der praktischen Einheiten. — Bei der Messung einer Grösse in einem absoluten Masssystem kann man auf zwei verschiedene Weisen vorgehen:

1. Man kann den Wert der Grösse lediglich durch geometrische und mechanische Messungen d. h. lediglich unter Benutzung der Normalmasse von Länge, Masse und Zeit bestimmen. Eine solche Bestimmung heisst dann *absolut.*

2. Man kann zuerst ein Vergleichsmass, welches die Einheit für die Grössen jener Art angiebt, sich herstellen, und dann den Wert der zu messenden Grösse durch Vergleichung derselben mit jenem Masse bestimmen. Eine solche Messung heisst *relativ.*

Bei der Bestimmung der Werte von elektrischen Grössen kann man zwar absolute Messungen vornehmen, aber wegen der damit verknüpften Schwierigkeiten begnügt man sich in der Praxis mit relativen Messungen; hierfür war es nun nicht genügend, die abstrakten Definitionen der verschiedenen Einheiten gegeben zu haben, sondern man bedurfte der Festsetzung von Normalien, welche die Einheiten mit einer für den praktischen Gebrauch hinreichenden Genauigkeit darstellen.

Noch bevor man an absolute Masssysteme dachte, fühlte man mit der Entwickelung der Elektrotechnik die Notwendigkeit, Widerstandsnormalien zu besitzen; und die Firmen, welche sich mit dem Bau elektrischer Apparate befassten, hatten willkürliche Vergleichseinheiten festgesetzt, von denen aber keine die verlangten Stabilitätsbedingungen erfüllte. Siemens verwendete als Einheit den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 mm.^{2} Querschnitt und 1 Meter Länge bei der Temperatur von 0°. Die Siemens'sche Einheit (*S. E.*), obwohl mit dem Nachteil behaftet, ein rein empirisches, mit keinem Masssysteme in innerem Zusammenhange stehendes Vergleichsmass zu sein, besitzt doch die Eigenschaften, die ein gutes Normalmass aufweisen muss, d. h. sie ist konstant mit der Zeit, da die Veränderungen nur von der Glasröhre abhängen, und kann leicht reproduziert werden, da es anzunehmen ist, dass das zu den Widerstandseinheiten verwendete Quecksilber, wenn es nur mit genügender Sorgfalt behandelt wird, denselben spezifischen Widerstand besitzt.

Aus diesen Gründen schlug die „British Association" vor, das von Siemens eingeführte Verfahren, eine Widerstandseinheit zu gewinnen, zu adoptieren und gab einer Kommission den Auftrag, die Länge der Quecksilbersäule von 1 mm.^{2} Querschnitt festzusetzen, deren Widerstand ein *Ohm* ist; es wurde hierfür eine Länge von 104,83 cm. gefunden. Diese Einheit (B. A.-Einheit) entspricht aber dem *Ohm* nicht genau. Der Pariser Kongress nahm als Länge der Quecksilbersäule 106 cm., einen Mittelwert aus den Bestimmungen verschiedener Beobachter, an und nannte diese Einheit, welche mit dem theoretischen *Ohm* noch nicht übereinstimmt, *legales Ohm*. Endlich wählte der Chicagoer Kongress zur Definierung der Quecksilbersäule die zur Erfüllung derselben erforderliche Masse, anstatt des Querschnittes, dessen Bestimmung die Kenntnis des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers voraussetzt, und bestimmte, dass die Länge der Säule 106,3 cm. sein soll; dieses Normalmass, welches sich in höherem Grade dem theoretischen *Ohm* nähert, heisst *internationales Ohm*.

Derselbe Chicagoer Kongress setzte noch die Normalien des *Ampère* und des *Volt* fest, indem für das erste die voltametrische Wirkung des Stromes und für das zweite die E. M. K. eines möglichst konstanten Elementes zu Grunde gelegt wurde.

8. Beschlüsse des internationalen elektrotechnischen Kongresses in Chicago bezüglich der elektrischen Masseinheiten. — Es wurde bestimmt, den im Kongresse durch Delegierte vertretenen Regierungen die Annahme folgender elektrischer Einheiten als der gesetzlich anerkannten zu empfehlen:

1. Als Widerstandseinheit: das *internationale Ohm*, welches auf dem *absoluten Ohm* gleich 10^9 C. G. S.-Widerstandseinheiten des elektromagnetischen Systemes beruht und durch den Widerstand dargestellt wird, den eine Quecksilbersäule von 106,3 cm. Länge und von konstantem Querschnitte und einer Masse von 14,4521 Gramm bei der Temperatur des schmelzenden Eises (0° C.) dem Durchfliessen eines Gleichstromes von geringer Stärke entgegensetzt.

2. Als Stromstärkeeinheit: das *internationale Ampère.* Dasselbe ist gleich dem zehnten Teile der absoluten C. G. S.-Stromstärkeeinheit im elektromagnetischen Masssystem und wird durch einen konstanten Strom dargestellt, welcher bei dem Durchgange durch eine wässerige Lösung von salpetersaurem Silber unter Einhaltung der für die Abscheidung günstigsten Bedingungen 0,001118 Gramm Silber in einer Sekunde niederschlägt.

3. Als Einheit der E. M. K.: das *internationale Volt*, d. h. jene E. M. K., welche, kontinuierlich wirkend, in einem Leiter vom Widerstande eines *internationalen Ohm* einen Strom von der Stärke eines *internationalen Ampère* erzeugt und für die Praxis hinreichend genau dargestellt ist durch das $\frac{1000}{1434}$fache der E. M. K. des Clark'schen Normalelementes bei der Temperatur von 15° C.

4. Als Einheit der Elektrizitätsmenge: das *internationale Coulomb*, welches der Elektrizitätsmenge entspricht, die bei einem unveränderlichen Strome von der Stärke eines *internationalen Ampère* in einer Sekunde durch jeden Querschnitt eines Leiters fliesst.

5. Als Einheit der elektrostatischen Kapazität: das *internationale Farad.* Dasselbe ist die Kapazität desjenigen Kondensators, der durch ein *internationales Coulomb* auf eine Potentialdifferenz gleich einem *internationalen Volt* geladen wird.

6. Als Einheit für die elektrische Arbeit: das *Joule*, gleich dem 10^7fachen der entsprechenden C. G. S.-Einheit. Dasselbe ist für die Praxis hinreichend genau dargestellt durch die in einer Sekunde geleistete Arbeit eines *internationalen Ampère* in einem Leiterstück, dessen Widerstand ein *internationales Ohm* beträgt.

7. Als Einheit für die elektrische Leistung: das *Watt*, gleich der 10^7fachen Grösse der entsprechenden absoluten C. G. S.-Einheit.

8. Als Einheit für die Induktanz: das *Henry*. Dasselbe ist gleich der Induktanz eines Stromkreises, in welchem die E. M. K. eines *internationalen Volt* induziert wird, wenn die Änderung der Stromstärke in der Sekunde ein *internationales Ampère* beträgt.

Verlagsbuchhandlung B. G. TEUBNER in Leipzig.

Vorlesungen
über
Technische Mechanik
in vier Bänden
von
Dr. August Föppl,

Professor der Mechanik u. Vorstand des Mechan.-Techn. Laboratoriums a. d. Techn. Hochschule in München.

I. Band: Einführung in die Mechanik (1. Aufl. 1898). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *M.* 10.—
II. Band: Graphische Statik. Preis geb. *M.* 10.—
III. Band: Festigkeitslehre (1. Aufl. 1897). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *M.* 12.—
IV. Band: Dynamik. (1. Aufl. 1899). 2. Aufl. 1901. Preis geb. *M.* 12.—

Preis des ganzen Werkes in vier eleganten Leinwd.-Bänden *M.* 44.—

Herr Geheimrat Professor **Lampe** von der Technischen Hochschule in Berlin schreibt:

„Wie bei der Anzeige des zuerst erschienenen dritten Bandes bemerkt wurde, ist die Föpplsche Bearbeitung der Mechanik dadurch ausgezeichnet, dafs die Darstellung von grofser Einfachheit und Klarheit ist, das Hauptgewicht in die Begriffsbildung gelegt wird; durch Vermeidung verwickelter analytischer Betrachtung wird der Raum gewonnen zur eingehenden Erörterung und Vertiefung der Grundanschauungen auf physikalischer Basis. Diese Eigenschaften fallen natürlich bei dem vorliegenden ersten Bande am meisten in die Augen. . . . .“

„Als eigenartiges Erzeugnis eines selbständig schaffenden Geistes verdient das Buch, welches durch seine grofse Verbreitung in technischen Kreisen gewifs einen bedeutenden Einfluss ausüben wird, jedenfalls auch von wissenschaftlicher Seite volle Beachtung und genaue Prüfung der Einzelheiten.“

Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines:

„Bei der allgemein bekannten Bedeutung, die der Verfasser auf dem Gebiete der Festigkeitsuntersuchungen besitzt, und bei den zahlreichen Erfahrungen, die er als Leiter einer der bedeutendsten Untersuchungsanstalten gewonnen hat, ist gerade die Bearbeitung der Festigkeitslehre von seiner Seite für die Technikerschaft von höchstem Interesse. Wenn auch Föppls Werk sich zunächst an seine Hörer wendet, so ist es dennoch auch von gröfstem Nutzen für den in der Praxis stehenden Ingenieur. Allerdings setzt es einige Kenntnisse in der Differentialrechnung noch voraus, aber nur in bescheidenem Umfange, sodafs man voraussetzen kann, dafs jeder Ingenieur aus seiner Hochschulzeit her noch so viel behalten hat. Übrigens hat der Verfasser durch die vollständig durchgeführten Übungsbeispiele in den Aufgaben auch dem in der Differentialrechnung Ungeübten die Benützung seines Buches wesentlich erleichtert, man braucht wirklich nur noch mit den Grundbegriffen überhaupt genügend vertraut zu sein, um nach diesen Mustern weiterarbeiten zu können.“

Die Ingenieur-Mathematik
in elementarer Behandlung.
Von
Prof. Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen i. W., Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie.

Erster Teil: enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit 287 Fig. und zahlr. Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] gr. 8. 1897. In Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Zweiter Teil: enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorieen der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlr. Übungsbeispielen und einem Anhange über Masseinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

Die „**Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure**“ schreibt:

„In allen Abschnitten bilden nicht die mathematischen Formeln die Hauptsache, sondern die zahlreichen Anwendungen auf mechanische Aufgaben. Überall wird gezeigt, wie mit sehr wenigen mathematischen Sätzen eine Unmenge mechanischer Aufgaben gelöst werden kann; zur Erhöhung des Interesses sind stets überaus anregende Betrachtungen über weitere Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren angeknüpft. — Jede Aufgabe ist elegant gelöst, der eingeschlagene Weg oft geradezu verblüffend, sodafs ein Studium nicht nur den Lehrern an technischen Unterrichtsanstalten sowie den Mathematikern an allgemein bildenden Schulen, sondern auch solchen Ingenieuren, die noch keine Gelegenheit hatten, elementare Verfahren kennen zu lernen, aufs wärmste zu empfehlen ist.“

Kataloge gratis und franko!